

多変数関数のテイラー展開



私は大学1年生です。入力変数が複数であり、かつ、出力は単なる実数であるような多変数関数 $f(x,y,\dots)$ に対する Taylor 展開について教わりました。具体的な式を知りたいので、入力変数が二つの多変数関数 C^3 -級 $f(x,y)$ に対する Taylor 展開の式を具体的に書いてください。

もちろんです。大学1年生向けに丁寧に説明しますね。

多変数関数 $f(x, y)$ のテイラー展開 (3階まで)

関数 $f(x, y)$ が十分滑らか (ここでは3階連続微分可能、つまり C^3 -級) であると仮定します。点 (x, y) のまわり、基準点 (a, b) におけるテイラー展開 (3階まで) は以下の形になります：

$$\begin{aligned} f(x, y) \approx & f(a, b) \\ & + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\ & + \frac{1}{2} [f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f_{yy}(a, b)(y - b)^2] \\ & + \frac{1}{6} [f_{xxx}(a, b)(x - a)^3 + 3f_{xxy}(a, b)(x - a)^2(y - b) \\ & + 3f_{xyy}(a, b)(x - a)(y - b)^2 + f_{yyy}(a, b)(y - b)^3] \end{aligned}$$

各項の意味

- $f(a, b)$: 基準点での関数の値
- f_x, f_y : 一階偏導関数 (x, y 方向の傾き)
- f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} : 二階の偏導関数 (曲率)
- $f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyy}, f_{yyy}$: 三階の偏導関数 (さらに変化の様子)

特に注意すべき点

- 混合項 (たとえば f_{xy}) の係数には対称性があり、通常 $f_{xy} = f_{yx}$ として計算されます (微分可能性が十分ある場合)。
- この式は、 (x, y) が (a, b) に十分近い場合の近似式です。
- 各項の次数 (たとえば1次、2次、3次) が増えるにつれ、誤差は小さくなります。

例： $f(x, y) = e^{x+y}$ を $(0, 0)$ のまわりで展開

実際にこの関数に上の式を使って展開してみると：

- $f(0, 0) = 1$
- $f_x = f_y = e^{x+y} \Rightarrow f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 1$
- $f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = e^{x+y} \Rightarrow f_{xx}(0, 0) = f_{xy}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = 1$
- 同様に3階微分もすべて1

したがって、

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx 1 + x + y + \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + \frac{1}{6}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) \\ &= 1 + x + y + \frac{1}{2}(x + y)^2 + \frac{1}{6}(x + y)^3 \end{aligned}$$

これは実は e^{x+y} のテイラー展開そのものです。

必要であれば、より高次の展開や一般の n 次元への拡張もご紹介できます。



ありがとうございます。さらにわかりやすくなるように、 $f(x+dx, y+dy)$ を展開する形で書いてください。ただし今回は2階微分の項までで良いです。

喜んでお応えします！

多変数関数のテイラー展開（2階まで）

$f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ の形で、点 (x, y) を基準点として展開します。

関数 $f(x, y)$ が C^2 -級（2階連続微分可能）であるとき、変数の小さなずれ $\Delta x, \Delta y$ に対して、**2階までのテイラー展開**は次のように表されます：

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y) &\approx f(x, y) \\ &\quad + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y \\ &\quad + \frac{1}{2} [f_{xx}(x, y)(\Delta x)^2 + 2f_{xy}(x, y)\Delta x\Delta y + f_{yy}(x, y)(\Delta y)^2] \end{aligned}$$

各項の意味

- $f(x, y)$ ：基準点での関数の値
- 一次の変化項
 - $f_x(x, y)\Delta x$ ：x 方向にずれたときの変化
 - $f_y(x, y)\Delta y$ ：y 方向にずれたときの変化
- 二次の変化項
 - $f_{xx}(x, y)(\Delta x)^2$ ：x 方向の曲がり

- $f_{yy}(x, y)(\Delta y)^2$: y 方向の曲がり
- $2f_{xy}(x, y)\Delta x\Delta y$: x, y 両方向の混合項 (注意: 2がつきます)

コンパクトなベクトル形式 (発展)

少し進んだ形で、ベクトル表記にすると：

$$f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{x}^\top H_f(\mathbf{x}) \Delta\mathbf{x}$$

ここで：

- $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- $\Delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$
- $\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$: 勾配ベクトル
- $H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$: ヘッセ行列 (2階微分の行列)

例: $f(x, y) = \log(1 + x + y)$ を $(0, 0)$ のまわりで展開

- $f(0, 0) = \log(1) = 0$
- $f_x = f_y = \frac{1}{1+x+y} \Rightarrow f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 1$
- $f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = -\frac{1}{(1+x+y)^2} \Rightarrow f_{xx}(0, 0) = f_{xy}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = -1$

したがって、

$$f(\Delta x, \Delta y) \approx 0 + \Delta x + \Delta y - \frac{1}{2} ((\Delta x)^2 + 2\Delta x\Delta y + (\Delta y)^2)$$

必要があれば、さらに3変数以上や高次の項への展開も説明できます。



では、同様に $f(x+dx, y+dy, z+dz)$ を展開する形で2階微分の項まで書いてください。

はい、3変数関数 $f(x, y, z)$ に対して、点 (x, y, z) を基準に $f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ を2階微分までテイラー展開した形は以下のようになります。

3変数関数のテイラー展開 (2階まで)

$$\begin{aligned}
f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) &\approx f(x, y, z) \\
&+ f_x(x, y, z)\Delta x + f_y(x, y, z)\Delta y + f_z(x, y, z)\Delta z \\
&+ \frac{1}{2} \left[f_{xx}(x, y, z)(\Delta x)^2 + f_{yy}(x, y, z)(\Delta y)^2 + f_{zz}(x, y, z)(\Delta z)^2 \right. \\
&\quad \left. + 2f_{xy}(x, y, z)\Delta x\Delta y + 2f_{xz}(x, y, z)\Delta x\Delta z + 2f_{yz}(x, y, z)\Delta y\Delta z \right]
\end{aligned}$$

各項の意味

- 一次偏微分項：
 - $f_x\Delta x$: x方向への一次変化
 - $f_y\Delta y$: y方向への一次変化
 - $f_z\Delta z$: z方向への一次変化
- 二次偏微分項：
 - 対角項（曲率）：
 - $f_{xx}(\Delta x)^2, f_{yy}(\Delta y)^2, f_{zz}(\Delta z)^2$
 - 混合項（交差変化）：
 - $f_{xy}\Delta x\Delta y, f_{xz}\Delta x\Delta z, f_{yz}\Delta y\Delta z$
 - 係数の2は、混合項が対称（たとえば $f_{xy} = f_{yx}$ ）であることに対応しています。

コンパクトなベクトル・行列形式（発展）

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^\top H_f(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}$$

ここで：

- $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- $\Delta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$
- $\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$
- $H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix}$ (ヘッセ行列)

必要なら

- 3階や任意次元の展開
- 実例での展開（例： $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$ など）

も続けてご説明できます。



この展開式を、微小変化を表すベクトル $d(x,y,z)$ 、勾配ベクトル ∇f 、ヘッセ行列 H_f を用いてきれいに書くとどうなりますか。

とても良い質問です。

3変数関数 $f(x, y, z)$ に対する **2階までのテイラー展開**を、**ベクトル記法**を用いてコンパクトに、かつ美しく表現する形を以下にまとめます。

◆ 記法の定義

- 点： $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- 微小変化： $d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$
- 勾配ベクトル（一次導関数）：

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- ヘッセ行列（2階導関数）：

$$H_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

◆ 展開式（2階まで）

$$f(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^\top d\mathbf{x} + \frac{1}{2} d\mathbf{x}^\top H_f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

◆ それぞれの意味

- $f(\mathbf{x})$ ：基準点での関数の値
- $\nabla f(\mathbf{x})^\top d\mathbf{x}$ ：一次変化（内積）

- $\frac{1}{2}d\mathbf{x}^\top H_f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$: 二次変化 (2次形式)

◆ この表現の利点

- 任意の次元数にも拡張可能 (たとえば n 変数でもそのまま適用可能)
- 数式として非常にコンパクトかつ構造的に美しい
- 線形代数的な直感とも一致 (内積、2次形式)

必要であれば、この式を使った具体例の計算や、 n 変数への一般化もお手伝いできます。



$f(x,y,z,\dots)$ に関するヘッセ行列 H_f に関する二次形式が正定値になるのはどんなときですか。

よい質問です。

関数 $f(x, y, z, \dots)$ に関するヘッセ行列 H_f の二次形式が正定値である条件は、関数の極値判定や局所凸性と深く関係します。

◆ ヘッセ行列の二次形式とは

まず、ヘッセ行列 $H_f(\mathbf{x})$ による二次形式とは：

$$Q(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^\top H_f(\mathbf{x})\mathbf{v}$$

ここで $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ は任意のベクトルです。

◆ この二次形式が「正定値」とは

正定値とは：

$$\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}^\top H_f(\mathbf{x})\mathbf{v} > 0$$

◆ ヘッセ行列が正定値 \Leftrightarrow 関数の局所的性質

✓ 関数の意味づけ：

- $H_f(\mathbf{x})$ が正定値であるとき：
 - f は点 \mathbf{x} の近傍で下に凸 (strictly convex)
 - もし $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ ならば、 \mathbf{x} は厳密な局所最小値

◆ ヘッセ行列が正定値になる条件

条件1：対称行列

- ヘッセ行列は常に**対称**（混合偏微分が連続なら $f_{xy} = f_{yx}$ ）

条件2：すべての固有値が正

- ヘッセ行列の**全ての固有値が正**である \Leftrightarrow 正定値

条件3（Sylvesterの定理）：

- 上から順に**主小行列式（leading principal minors）**が**すべて正**である（たとえば3変数なら1次・2次・3次の部分行列の行列式すべて）

◆ 例（3変数）：

$$H_f = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$$

このとき、正定値である条件は：

1. $a > 0$
2. $\begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix} > 0$
3. $\det(H_f) > 0$

◆ まとめ：正定値となるのは

ヘッセ行列が対称で、かつ、全ての固有値が正（またはSylvester条件を満たす）とき

必要であれば：

- 半正定値との違い
- 負定値の条件
- 任意点での凸性と関連する幾何的意味

なども補足できます。



ヘッセ行列は通常は対称であるが期待できますが、もしも対称でない場合、固有値がすべて正であっても二次形式が正定値でない場合がありますか？

非常に鋭い質問です。

結論から申し上げますと：

はい、ヘッセ行列が対称でない場合には、たとえ固有値がすべて正でも、二次形式は正定値とは限りません。

これは**「固有値が正 ⇒ 正定値」**という命題が、**対称行列に限ってのみ**成り立つためです。

◆ 重要な違い：対称行列 vs 非対称行列

✓ 対称行列の場合

- 実対称行列（たとえば正則なヘッセ行列）は、常に**直交対角化可能**（固有ベクトルが直交）
- そのとき、**すべての固有値が正 ⇔ 二次形式が正定値**

✗ 非対称行列の場合

- 一般の非対称行列は：
 - 固有値が**実数とは限らない**
 - 固有ベクトルが**直交しない**
 - 固有値と二次形式の符号は**一致しない可能性がある**

◆ 具体例：固有値はすべて正だが、正定値でない行列

次の行列を考えます：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- 固有値は $\lambda = 2$ （重複）
- 対称でない
- このときの二次形式：

$$\mathbf{v}^\top A \mathbf{v} = (x \ y) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 3xy + 2y^2$$

この式は、例えば $x = 1, y = -1$ を代入すると：

$$2(1)^2 + 3(1)(-1) + 2(-1)^2 = 2 - 3 + 2 = 1 > 0$$

一見正っぽく見えますが、よく見るとこの二次形式は**常に正とは限りません**。実際には対称でないため、**正定値性を固有値から判定することができません**。

◆ 一般に、非対称行列の二次形式には注意

- 二次形式 $\mathbf{v}^\top A \mathbf{v}$ の符号を判定するには、 **A が対称かどうか**が決定的に重要
- 非対称な A に対しては、正定値性は**固有値からでは判断できない**

◆ まとめ

条件	固有値すべて正 → 二次形式正定値？
対称行列	✓ はい
非対称行列	✗ 必ずしもそうではない

したがって、

固有値がすべて正でも、行列が対称でなければ、二次形式が正定値である保証はない。

このため、関数の2階微分から得られるヘッセ行列が対象であることは、理論的にも非常に重要な前提条件なのです。



固有値がすべて正でも二次形式が負になる具体的なケースを示してください。ただし、そのときのベクトルも、二次形式の値も示してください。

はい、非常に本質的な問題意識です。

ここでは、固有値がすべて正な非対称行列を与え、その行列による二次形式が負になるベクトルを具体的に示します。

◆ 行列の例

次の非対称な 2×2 行列を考えます：

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

これは上三角行列なので、固有値は対角成分：

- 固有値： $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$ （どちらも正）

◆ 二次形式 $Q(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T A \mathbf{v}$

任意のベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、二次形式は：

$$Q(x, y) = (x \ y) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3x^2 + 4xy + 2y^2$$

◆ この二次形式が負になるベクトルを探す

例えば、 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を代入してみます：

$$Q(-1, 1) = 3(-1)^2 + 4(-1)(1) + 2(1)^2 = 3 - 4 + 2 = 1$$

→ 正。もう少し工夫しましょう。

では、 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を試みます：

$$Q(-2, 1) = 3(-2)^2 + 4(-2)(1) + 2(1)^2 = 12 - 8 + 2 = 6$$

まだ正。

では逆に $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ を代入：

$$Q(1, -3) = 3(1)^2 + 4(1)(-3) + 2(-3)^2 = 3 - 12 + 18 = 9$$

OK、ではもう少し大きな交差項を持つ行列を考えます。

◆ 強い非対称性を持つ別の例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

固有値：どちらも 1 (重複)

二次形式：

$$Q(x, y) = x^2 + 100xy + y^2$$

試しに $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$Q(1, -1) = 1^2 + 100(1)(-1) + (-1)^2 = 1 - 100 + 1 = -98$$

✓ 結論 (具体例)

- 行列：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 固有値： $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (すべて 正)
- ベクトル：

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- 二次形式の値：

$$\mathbf{v}^T A \mathbf{v} = -98 \quad (\text{負})$$

◆ 要点まとめ

- 非対称行列では、固有値がすべて正でも二次形式が負になることがある。
- 正定値性は固有値の符号だけでは判定できない（対称性が必要）。
- 安定性解析・最適化・凸性などでこの点は極めて重要。

必要であれば、このような性質の一般条件や、擬対称行列やJordan標準形との関係についても補足可能です。



2変数関数 $f(x,y)$ に関するヘッセ行列 H_f に関する二次形式が正定値になるのはどんなときですか。

2変数関数 $f(x, y)$ に対するヘッセ行列 $H_f(x, y)$ による二次形式が正定値になる条件を、以下に丁寧に説明します。

◆ 前提

関数 $f(x, y)$ が C^2 -級（2階連続微分可能）であるとき、ヘッセ行列は次のように定義されます：

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} \quad (\text{対称行列})$$

このとき、任意の非ゼロベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$ に対して、

$$Q(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^\top H_f \mathbf{v}$$

が常に正になるとき、この二次形式は正定値と言います。

◆ 正定値になるための条件（Sylvesterの定理）

2次元実対称行列（ヘッセ行列）が正定値であるための必要十分条件は：

✓ 条件1：対角成分の左上が正（第1主小行列式）

$$f_{xx} > 0$$

✓ 条件2：行列式が正（第2主小行列式）

$$\det(H_f) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

この2つを合わせて：

$f_{xx} > 0$ かつ $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ のとき、 H_f による二次形式は正定値

◆ 幾何学的意味

- この条件が成り立つとき、点 (x, y) は関数 f の**下に凸な点（局所最小値の候補）**になります。
- さらに、もし $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ （勾配ゼロ）であれば、その点は**厳密な局所最小値**になります。

◆ 具体例

関数：

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$$

→ 一階導関数：

$$f_x = 2x + 2y, \quad f_y = 2x + 6y$$

→ ヘッセ行列：

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

→ 条件チェック：

- $f_{xx} = 2 > 0$
- 行列式 $\det(H_f) = 2 \cdot 6 - 2^2 = 12 - 4 = 8 > 0$

✔ よって、このヘッセ行列は正定値。

◆ まとめ

2変数関数のヘッセ行列による二次形式が**正定値**になるのは：

$$f_{xx} > 0 \quad \text{かつ} \quad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

この条件は、関数の**局所的な下に凸性**を表しており、最適化や安定性解析の基本的な判定基準です。



二変数関数 $f(x, y) = 1 - 2x^2 - xy - y^2 + 3x - 3y$ の、(あるならば) 極大値、極小値を求めてください。

与えられた関数：

$$f(x, y) = 1 - 2x^2 - xy - y^2 + 3x - 3y$$

について、**極値（極大・極小）**があるかどうかを調べ、あるならばその値と場所を求めます。

◆ ステップ1：停留点（臨界点）を求める

まず、偏微分して勾配ベクトル $\nabla f = \mathbf{0}$ を解きます。

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -4x - y + 3$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -x - 2y - 3$$

これらを0と置いて連立方程式を解きます：

$$\begin{cases} -4x - y + 3 = 0 & (1) \\ -x - 2y - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

解法：

(1) から

$$y = -4x + 3$$

これを(2)に代入：

$$\begin{aligned} -x - 2(-4x + 3) - 3 &= 0 \\ -x + 8x - 6 - 3 &= 0 \\ 7x = 9 &\Rightarrow x = \frac{9}{7} \end{aligned}$$

$$y = -4x + 3 = -4 \cdot \frac{9}{7} + 3 = -\frac{36}{7} + \frac{21}{7} = -\frac{15}{7}$$

◆ よって、停留点は：

$$(x, y) = \left(\frac{9}{7}, -\frac{15}{7} \right)$$

◆ ステップ2：ヘッセ行列で極値の種類を判定

関数の2階偏導関数：

$$f_{xx} = -4, \quad f_{xy} = -1, \quad f_{yy} = -2$$

よって、ヘッセ行列：

$$H_f = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

この行列の判定：

- $f_{xx} = -4 < 0$
- 行列式：

$$\det(H_f) = (-4)(-2) - (-1)^2 = 8 - 1 = 7 > 0$$

✔ これはヘッセ行列が負定値であることを意味します。

($f_{xx} < 0$ 、かつ行列式 $> 0 \rightarrow$ 二次形式は負定値)

◆ 結論

- 極値の種類：極大値
- 位置：

$$(x, y) = \left(\frac{9}{7}, -\frac{15}{7} \right)$$

- 値：
関数に代入：

$$\begin{aligned} f\left(\frac{9}{7}, -\frac{15}{7}\right) &= 1 - 2\left(\frac{9}{7}\right)^2 - \left(\frac{9}{7}\right)\left(-\frac{15}{7}\right) - \left(-\frac{15}{7}\right)^2 + 3\left(\frac{9}{7}\right) - 3\left(-\frac{15}{7}\right) \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{81}{49} + \frac{135}{49} - \frac{225}{49} + \frac{27}{7} + \frac{45}{7} \\ &= 1 - \frac{162}{49} + \frac{135}{49} - \frac{225}{49} + \frac{72}{7} \end{aligned}$$

簡単に通分してまとめます：

- $1 = \frac{49}{49}$
- 合計：

$$\frac{49 - 162 + 135 - 225}{49} = \frac{-203}{49}, \quad \frac{72}{7} = \frac{504}{49}$$

$$f = \frac{-203 + 504}{49} = \frac{301}{49}$$

✔ 最終答え

- 極大値： $\boxed{\frac{301}{49}}$
- 極大値の位置： $\boxed{\left(\frac{9}{7}, -\frac{15}{7}\right)}$