

# 偏微分の連鎖律



$f(x,y) = x * y^2 + x^3 * y$ ,  $x = u+v$ ,  $y = u-v$  のとき、 $f$  の  $v$  による偏微分を求めてください。その際、計算において連鎖律を用いると思いますが、この計算過程を丁寧に解説してください。

関数  $f(x,y) = xy^2 + x^3y$  において、変数変換

$$x = u + v, \quad y = u - v$$

をしたとき、 $f$  を  $u, v$  の関数とみなし、 $\frac{\partial f}{\partial v}$  を求めたい、という問題です。

これは\*\*連鎖律 (Chain Rule)\*\*を用いて偏微分を行う典型的な例です。順を追って丁寧に解説します。

## Step 1: 連鎖律の準備

$f$  は元々  $x, y$  の関数で、 $x, y$  は  $u, v$  の関数です。よって、合成関数の偏微分の連鎖律を使って次のように書けます：

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

それぞれの項を順に計算していきます。

## Step 2: $\frac{\partial f}{\partial x}$ と $\frac{\partial f}{\partial y}$ の計算

関数：

$$f(x,y) = xy^2 + x^3y$$

部分微分を計算します。

- $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 3x^2y$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + x^3$

## Step 3: $\frac{\partial x}{\partial v}$ , $\frac{\partial y}{\partial v}$

- $x = u + v \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial v} = 1$
- $y = u - v \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial v} = -1$

## Step 4: 連鎖律に代入

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v} &= (y^2 + 3x^2y) \cdot 1 + (2xy + x^3) \cdot (-1) \\ &= y^2 + 3x^2y - 2xy - x^3\end{aligned}$$

## Step 5: 最終的に $x = u + v, y = u - v$ を代入して $u, v$ による表現に直す

それぞれ代入していきましょう：

- $x = u + v$
- $y = u - v$

まず各項を代入：

- $y^2 = (u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$
- $x^2 = (u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$
- $x^2y = (u + v)^2(u - v)$  ←これは計算しておきます
- $2xy = 2(u + v)(u - v) = 2(u^2 - v^2)$
- $x^3 = (u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$

順に計算して整理：

$$\begin{aligned}1. & y^2 = u^2 - 2uv + v^2 \\ 2. & 3x^2y = 3(u + v)^2(u - v) \\ = & 3(u^2 + 2uv + v^2)(u - v) = 3[(u^3 - u^2v) + (2u^2v - 2uv^2) + (uv^2 - v^3)] = 3(u^3 + u^2v - uv^2 - v^3) \\ 3. & -2xy = -2(u^2 - v^2) \\ 4. & -x^3 = -(u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3)\end{aligned}$$

## Step 6: すべてまとめる

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v} &= y^2 + 3x^2y - 2xy - x^3 \\ &= (u^2 - 2uv + v^2) + 3(u^3 + u^2v - uv^2 - v^3) - 2(u^2 - v^2) - (u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3)\end{aligned}$$

整理します。

まず項を分けてみましょう：

- $u^2 - 2uv + v^2$  (これは  $y^2$ )
- $+3u^3 + 3u^2v - 3uv^2 - 3v^3$
- $-2u^2 + 2v^2$

- $-u^3 - 3u^2v - 3uv^2 - v^3$

すべてまとめると：

- $u^3 : +3u^3 - u^3 = 2u^3$
- $u^2v : +3u^2v - 3u^2v = 0$
- $uv^2 : -3uv^2 - 3uv^2 = -6uv^2$
- $v^3 : -3v^3 - v^3 = -4v^3$
- $u^2 : u^2 - 2u^2 = -u^2$
- $uv : -2uv$
- $v^2 : +v^2 + 2v^2 = 3v^2$

## ✓ 最終結果

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 2u^3 - u^2 - 2uv - 6uv^2 + 3v^2 - 4v^3$$

これが、連鎖律を用いて導いた、 $f(x, y)$  の  $v$  に関する偏微分です。



この関係性( $x = u+v, y = u-v$ )を、 $(u, v) \rightarrow (x, y)$  という変数変換ととらえた場合のヤコビ行列はどうなるか教えてください。

はい、変数変換

$$(u, v) \mapsto (x, y) \quad \text{ただし} \quad x = u + v, \quad y = u - v$$

のヤコビ行列 (Jacobian matrix) は、以下のように計算されます。

## ■ ヤコビ行列とは

変数変換

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

のヤコビ行列  $J$  は、次のような **偏微分の行列**です：

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

## ■ この場合の計算

関数定義：

- $x = u + v$
- $y = u - v$

それぞれ偏微分すると：

- $\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \frac{\partial x}{\partial v} = 1$
- $\frac{\partial y}{\partial u} = 1, \frac{\partial y}{\partial v} = -1$

したがって、ヤコビ行列  $J$  は：

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

## ■ ヤコビ行列式 (参考)

ヤコビアン (ヤコビ行列式) は、この行列の行列式：

$$\det(J) = (1)(-1) - (1)(1) = -1 - 1 = -2$$

これは、変数変換による面積のスケーリング係数が  $-2$  であることを意味します (符号は向きの反転も意味します)。

## ✓ まとめ

変換  $(u, v) \mapsto (x, y) = (u + v, u - v)$  に対応するヤコビ行列は：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ヤコビ行列式は  $-2$  です。



二次元の点のユークリッド座標  $(x, y)$  を極座標  $(r, \theta)$  で表示するとき、これも変数変換と捉えた場合のヤコビ行列を教えてください。

はい、ユークリッド座標  $(x, y)$  を極座標  $(r, \theta)$  で表す変換：

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

を、変数変換  $(r, \theta) \mapsto (x, y)$  として扱うときのヤコビ行列 (Jacobian matrix) を求めましょう。

## ✓ ヤコビ行列の定義

変換：

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

ヤコビ行列  $J$  は、以下のような偏微分で構成される  $2 \times 2$  行列です：

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

## ✓ 各要素の計算

- $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta$
- $\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta$
- $\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta$
- $\frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta$

## ✓ ヤコビ行列の完成形

$$J = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

## 🔄 参考：ヤコビ行列式（ヤコビアン）

この行列の行列式（面積のスケールリング因子）は：

$$\det(J) = (\cos \theta)(r \cos \theta) - (-r \sin \theta)(\sin \theta) = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$$

これは極座標で面積要素が  $r dr d\theta$  となる理由です。

## ✓ まとめ

ユークリッド座標  $(x, y)$  を極座標  $(r, \theta)$  によって表す変換に対するヤコビ行列は：

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

ヤコビ行列式は  $r$  です。



逆に  $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$  という変数変換ととらえた場合のヤコビ行列はどうなりますか？

はい、今度は逆に、ユークリッド座標  $(x, y)$  から極座標  $(r, \theta)$  への変換：

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

を、変数変換  $(x, y) \mapsto (r, \theta)$  として捉えたときのヤコビ行列を求めます。

## ✓ ヤコビ行列の定義

このときのヤコビ行列  $J$  は：

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

### Step 1: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ の偏微分

- $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}$
- $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r}$

### Step 2: $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ の偏微分

まず以下の公式を使います：

$$\frac{d}{dx} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{d}{dy} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

(この結果は連鎖律から得られます)

なので：

- $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{r^2}$
- $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{r^2}$

## ✓ ヤコビ行列の完成形

$$J = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{bmatrix}$$

## ✓ まとめ

変換  $(x, y) \mapsto (r, \theta)$ 、すなわち

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

に対応するヤコビ行列は：

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{bmatrix}$$

このヤコビ行列は、逆変換  $(r, \theta) \mapsto (x, y)$  のヤコビ行列の逆行列になっていることが確認できます。



3次元中の曲面「高さ  $z = f(x, y) = 4x^2y + xy^3$ 」に対し、点  $(-1, 1, 3)$  での接平面を式で表すとどうなるか教えて下さい。

3次元空間の曲面

$$z = f(x, y) = 4x^2y + xy^3$$

に対し、点  $(-1, 1, 3)$  における接平面の方程式を求める問題です。

## ✓ 基本方針：接平面の公式

関数  $z = f(x, y)$  のグラフ上の点  $(x_0, y_0, z_0)$  における接平面の方程式は次のようになります：

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

ここで：

- $f_x$  :  $x$  による偏微分 (接平面の  $x$  方向の傾き)
- $f_y$  :  $y$  による偏微分 (接平面の  $y$  方向の傾き)

## Step 1: 偏微分の計算

まず、関数を再掲します：

$$f(x, y) = 4x^2y + xy^3$$

これを偏微分します。

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^2y + xy^3) = 8xy + y^3$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(4x^2y + xy^3) = 4x^2 + 3xy^2$$

## Step 2: 点 $(-1, 1)$ における偏微分の値を求める

- $f_x(-1, 1) = 8(-1)(1) + (1)^3 = -8 + 1 = -7$
- $f_y(-1, 1) = 4(-1)^2 + 3(-1)(1)^2 = 4 - 3 = 1$

また、 $f(-1, 1) = 4(-1)^2(1) + (-1)(1)^3 = 4 - 1 = 3$

したがって、点  $(-1, 1, 3)$  はこの曲面上にあることも確認できました。

---

### Step 3: 接平面の方程式を代入して完成

接平面の式は：

$$z = 3 + (-7)(x + 1) + 1(y - 1)$$

整理して：

$$z = 3 - 7(x + 1) + (y - 1) = 3 - 7x - 7 + y - 1 = -7x + y - 5$$

---

### ✓ 最終結果

点  $(-1, 1, 3)$  における接平面の方程式は：

$$z = -7x + y - 5$$