極限の経路依存性

入力が二つの実数値で出力が一つの実数値であるような関数 f(x,y) で、極限 lim_{(x,y)->(0,0)} f(x,y) を考えるときに、(x,y)->(0,0) の近づき方で f(x,y) の収束先が異なって見えるような例を挙げてください．

はい、そのような関数の典型例として、次の関数を挙げることができます：

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad ((x, y) \neq (0, 0))$$

この関数の $(x, y) \to (0, 0)$ における極限を調べると、**近づき方（経路）によって極限値が異なる**ことがわかります。実際にいくつかの経路で計算してみましょう。

経路1：$y = 0$ で近づく

$$f(x, 0) = \frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x, 0) = 1$$

経路2：$x = 0$ で近づく

$$f(0, y) = \frac{0^2 - y^2}{0^2 + y^2} = \frac{-y^2}{y^2} = -1 \quad \Rightarrow \lim_{y \to 0} f(0, y) = -1$$

経路3：$y = x$ で近づく

$$f(x, x) = \frac{x^2 - x^2}{x^2 + x^2} = \frac{0}{2x^2} = 0 \quad \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x, x) = 0$$

結論：

経路によって極限値が異なります（1, -1, 0など）。したがって、この関数は $(x, y) \to (0, 0)$ において**極限が存在しません**。

必要に応じて、さらに連続性や極限の定義の確認なども説明できます。

良い例ですね．他の例はありますか？

ありがとうございます。はい、同様に「(x, y) → (0, 0) の近づき方で極限値が変わる」ような関数は他にも多くの例があります。以下に代表的なものをいくつか紹介します。

例 1:

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} \quad ((x,y) \neq (0,0))$$

各経路での極限：

- $y = x$ のとき：

$$f(x,x) = \frac{2x^2}{2x^2} = 1$$

- $y = -x$ のとき：

$$f(x,-x) = \frac{-2x^2}{2x^2} = -1$$

→ 経路により極限値が異なるため、極限は存在しません。

例 2:

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} \quad ((x,y) \neq (0,0))$$

この関数の近づき方による違いを見てみましょう。

- $y = 0$：

$$f(x,0) = \frac{x^3}{x^2} = x \to 0$$

- $y = x$：

$$f(x,x) = \frac{x^3}{x^2+x^2} = \frac{x^3}{2x^2} = \frac{x}{2} \to 0$$

- 一見どの経路でも0に見えますが、**極限の値は0に見える**ので、この関数は実は極限が存在して 0 になります。

→ この例は逆に**経路によって極限値は同じでも、証明が必要になるタイプ**の例です（参考のために挙げました）。

例 3（極限が存在しない例）：

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2} \quad ((x,y) \neq (0,0))$$

経路ごとに調べる：

- $y = x^2$ のとき：

$$f(x, x^2) = \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + x^4} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

- $y = 0$ のとき：

$$f(x, 0) = \frac{0}{x^4} = 0$$

→ これも極限値が異なるため、極限は存在しません。

例 4（極座標で解析しやすい例）：

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

- これは $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ を導入して

$$f(x, y) = \frac{\sin(r^2)}{r^2}$$

→ この場合、極限は $\lim_{r \to 0} \frac{\sin(r^2)}{r^2} = 1$ なので、極限は**存在して1になる**（こちらも参考のため）。

まとめ：

極限が**存在しない例**として代表的なのは以下のような形です：

- 分母が $x^2 + y^2$ で、分子が非対称な形（例：$x^2 - y^2$, $2xy$, x^2y など）
- 経路によって対称性が崩れ、値が変わる設計になっている

必要に応じて、グラフや極座標での可視化もできますので、お申し付けください。

例3について、わかりやすい図やグラフを描いてください．

$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

画像を出力する

こちらが、関数

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

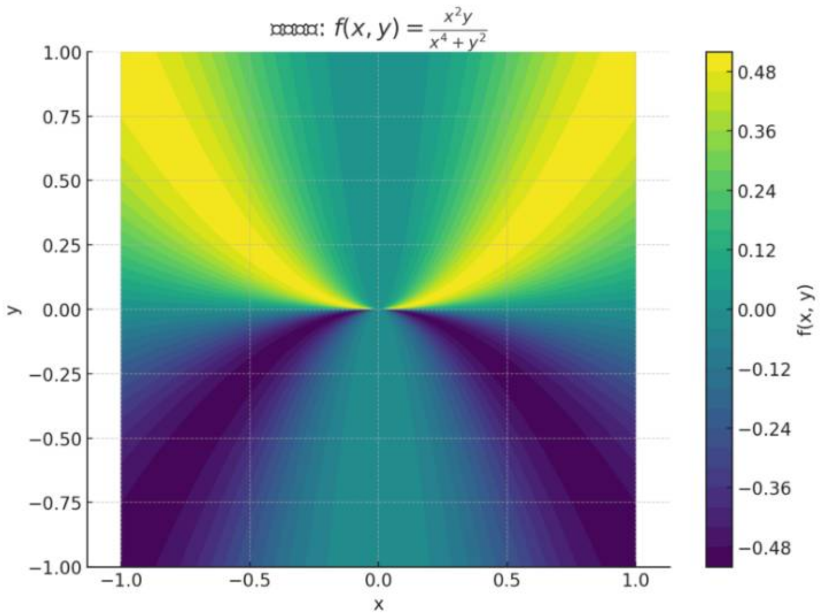
のグラフです。視覚的に見ると、$(x, y) \to (0, 0)$ に近づく経路によって、出力値が異なる様子がよくわかります。

とくに、$y = x^2$ に沿って近づくと値が $\frac{1}{2}$ に近づくのに対して、$y = 0$ ではゼロに近づきます。これは、グラフ上でも違う方向から中央に近づくと、**異なる高さに近づく**ことで示されています。

他の可視化（等高線、経路別の断面など）も必要でしたらお申し付けください。

xy平面に垂直な方向から見た図に等高線を描いてくれますか

等高線図: $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$



こちらが関数

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

の等高線図（xy平面に垂直な方向から見た図）です。

中央（原点）付近では、x軸やy軸方向からの接近で色（関数値）が異なっており、**接近経路によって極限値が異なる**ことが視覚的に確認できます。たとえば、y軸に沿って近づくと値が0に近づきますが、$y = x^2$ のような曲線に沿って近づくと値は別の定数（たとえば 1/2）に近づきます。

必要があれば、特定の経路上での値を重ねて描画することもできます。

f(x,y) = arctan(y/x) の x による偏微分、y による偏微分の両方を求めてください.

関数

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

の偏微分を求めましょう。ただし $x \neq 0$ と仮定して計算します（定義上、分母 $x = 0$ では未定義となるため）。

---

x による偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}$

まず、

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

合成関数の微分を用いて、内側を $u = \frac{y}{x}$ とおくと：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

---

y による偏微分 $\frac{\partial f}{\partial y}$

同様に、

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

結果：

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}}$$

この形は極座標での角度（偏角）に関する微分でもよく現れる形です。ご希望があればその幾何的な意味も解説できます。

念の為に、 (d/dx) arctan(x) = 1/(1+x^2) の解説もしてください.

もちろんです。関数

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

という基本公式の意味と導出について、丁寧に解説します。

🌿 ステップ1：関数の定義と目標

関数 $y = \arctan(x)$ は、**正接関数の逆関数**です。つまり、

$$y = \arctan(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \tan(y) = x, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

これを **暗黙関数の微分** という方法で微分します。

🧮 ステップ2：両辺を微分する

まず、

$$\tan(y) = x$$

と書いて、両辺を x で微分します。

- 左辺は合成関数なので、連鎖律を使って：

$$\frac{d}{dx}\tan(y(x)) = \sec^2(y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

- 右辺は単に $\frac{d}{dx}x = 1$

したがって：

$$\sec^2(y) \cdot \frac{dy}{dx} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2(y)}$$

🔄 ステップ3：$\sec^2(y)$ を x の式に書き直す

$$\tan(y) = x \quad \Rightarrow \quad \sec^2(y) = 1 + \tan^2(y) = 1 + x^2$$

ゆえに：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

✅ 結論：

$$\boxed{\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

この導出は、他の逆三角関数（例えば $\arcsin, \arccos$）の微分を求めるときにも同じ考え方で行われます。

もし幾何学的な意味や、他の方法（例えば三角関数のグラフからの理解）も見たい場合はお気軽にどうぞ！