

広義積分の解説



私は大学1年生です。微分積分学を学んでいますがあまり得意ではありません。広義積分について、その定義やなぜそんなことを考えるのかという理由・背景、そして具体例を教えてください。

とても良い質問です。
以下に、大学1年生向けにやさしく、かつしっかり理解できるように説明します。

1 「広義積分」とは

通常の定積分

$$\int_a^b f(x) dx$$

は、区間 $[a, b]$ 上で $f(x)$ が連続なら、普通に「面積」として定義できます。

ところが、以下のような場合に「そのままでは定義できない」積分を扱いたくなります：

1. 積分区間が無限に広がる場合

例：
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

2. 被積分関数が区間で発散する場合（特異点を持つ場合）

例：
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

こういう場合、普通の積分の定義は使えません。

でも「極限を使って面積を近づける」ことで、意味を与えることができます。
これが**広義積分 (Improper Integral)** です。

2 広義積分の定義（イメージと式）

- （区間が無限大に伸びる場合）

例えば

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

は、

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

と定義します。

つまり：

bまでの面積を計算して、そのbをどんどん大きくしたときの極限を取る。

- (被積分関数が端点で発散する場合)

例えば

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

は、0で発散するので、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

と定義します。

つまり：

発散しそうな端点を避けて近づける→極限で意味を与える。

3 なんでそんなことを考えるの？

とても大事な質問です。理由は：

✓ 面積として意味を持つ場合があるから

- 端点で大きくなるけど、面積は有限になることがある

✓ 物理・工学で無限の範囲を扱うとき

- 例：無限に広がる空間での重力、電場など

✓ 数学的に完全な理論を作るため

- 普通の積分だけでは不足する

4 具体例

① 収束する広義積分

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

定義通りに計算：

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-2} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1
 \end{aligned}$$

✔ 結果：収束。面積は有限の1。

② 発散する広義積分

$$\begin{aligned}
 &\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln x]_1^b \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty
 \end{aligned}$$

✔ 結果：発散。面積は無限大。

③ 端点で特異な例（収束するケース）

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 x^{-1/2} dx \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_{\epsilon}^1 \\
 &= 2(1 - 0) = 2
 \end{aligned}$$

✔ 結果：収束。面積は有限。

④ 端点で特異な例（発散するケース）

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 \frac{1}{x} dx \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [\ln x]_{\epsilon}^1 \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (0 - \ln \epsilon) = \infty
 \end{aligned}$$

✓ 結果：発散。面積は無限大。

5 まとめ

- ✓ 広義積分は「普通には定義できない積分に意味を与える」方法
- ✓ 無限区間や発散点を極限で処理
- ✓ 収束する場合も、発散する場合もある
- ✓ 応用範囲が広い（物理、工学、確率論など）

もし「もっと簡単に」「もっと詳しく」「別の例も」など、要望があればぜひ教えてください！



ありがとうございます。対象の不定積分が具体的に計算できない場合でもその広義積分が収束するかどうかを判定する方法はありますか。具体例もあわせて教えてください。

とても良いポイントです！

「不定積分を具体的に計算しなくても、広義積分が収束するかどうかを判定する方法」が実際によく使われます。

主に使うのは以下のような **比較判定法** です。

1 比較判定法のアイデア

「積分区間で関数を、よくわかっている関数と比べる」ことで収束・発散を判定します。

- もし

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

で、 $\int g(x) dx$ が収束するなら

$$\int f(x) dx \text{ も収束}$$

- 逆に

$$f(x) \geq g(x) \geq 0$$

で、 $\int g(x) dx$ が発散するなら

$$\int f(x) dx \text{ も発散}$$

2 直感的なイメージ

✓ 面積的には

- $f(x)$ が「 $g(x)$ より小さい」なら、 g の面積が有限なら f も有限
- $f(x)$ が「 $g(x)$ より大きい」なら、 g の面積が無限なら f も無限

3 具体例

例①

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

これはよく知られたテスト用関数です。

✓ $p > 1$ なら収束

✓ $p \leq 1$ なら発散

例②

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + x} dx$$

不定積分は面倒ですが、比較します。

$$x^2 + x \geq x^2$$

だから

$$\frac{1}{x^2 + x} \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1 \quad (\text{収束})$$

✓ なので比較判定で

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + x} dx \text{ も収束。}$$

例③

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$$

$p = \frac{1}{2} < 1$ なので

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1/2}} dx \text{ は発散。}$$

✔ だから

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ は発散。}$$

4 限比較判定法 (limit comparison test)

より便利な方法もあります。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

で、 $0 < c < \infty$ なら

✔ $\int g(x) dx$ が収束なら $\int f(x) dx$ も収束

✔ $\int g(x) dx$ が発散なら $\int f(x) dx$ も発散

例④

$$\int_1^{\infty} \frac{3x+2}{x^2} dx$$

被積分関数が

$$\frac{3x+2}{x^2} \approx \frac{3}{x}$$

比較対象：

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+2)/x^2}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{x} = 3$$

有限・正の値。

✔ なので

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \text{ は発散} \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{3x+2}{x^2} dx \text{ も発散}$$

5 まとめ

✔ 不定積分を「具体的に」計算しなくても

✔ 比べるだけで収束か発散かを判定できる

6 代表的な比較の目安

- $\frac{1}{x^p}$ (無限大近傍)
 - $p > 1$ なら収束
 - $p \leq 1$ なら発散
- $\frac{1}{x^p}$ (0近傍)
 - $p < 1$ なら収束
 - $p \geq 1$ なら発散

もし「さらにわかりやすい例を」「問題演習をしてみたい」「端点の発散例をもっと知りたい」などあれば、ぜひ教えてください！



曲線Cが $y = f(x)$ と関数 $f(x)$ で表せるとき、この $a \leq x \leq b$ での曲線の長さが $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ だと聞きました。曲線の長さがこの式で表せることをわかりやすく教えて下さい。

とても良い質問ですね！

大学1年生向けに、イメージを大切にしながら、**なぜ曲線の長さが**

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

になるのかをわかりやすく説明します。

1 そもそも「長さ」ってどう求める？

とても基本的な考え方から始めます。

- **直線の長さ**は「距離 = 直線の長さ」です。
- 曲がった線の長さは「曲線の長さ」 = 「細かく分割した直線の長さを足し合わせる」

つまり：

曲線を細かく直線で近似して足し算する！

2 アイデア（曲線を小さい線分で近似する）

曲線 $y = f(x)$ を、区間 $[a, b]$ を小さな区間に分けて考えます。

- $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ で

$$\Delta x = x_i - x_{i-1}$$

$$\Delta y = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

この区間の「直線的な長さ」は

$$\approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

✓ イメージ図（言葉で）

SCSS

```
(x_{i-1}, f(x_{i-1})) o-----o (x_i, f(x_i))
      \ approx straight line
```

- 曲線を細かい「線分」に分解。

3 全体の長さの近似

全体の長さ L は

$$L \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

4 さらに近似を進める（ Δx をととても小さくする）

$$\Delta y \approx f'(x_i^*) \Delta x$$

（ここで x_i^* は $[x_{i-1}, x_i]$ の中のどこかの点）

だから：

$$\begin{aligned} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} &\approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(x_i^*) \Delta x)^2} \\ &= \Delta x \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2} \end{aligned}$$

5 全区間を足し合わせると...

$$L \approx \sum_{i=1}^n \Delta x \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2}$$

- ✓ これがリーマン和になっていく！

6 Δx を無限に細かくすると...

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

7 直感的なまとめ

- ✓ 曲線を「ものすごく細かい直線」に分けて、その長さを足す
- ✓ $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ だから、長さは

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \approx \Delta x \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

- ✓ 積分で極限を取ると、連続的な「曲線の長さ」が計算できる

8 具体例

例えば直線 $y = mx + c$

$$f'(x) = m$$

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + m^2} dx \\ &= \sqrt{1 + m^2} \cdot (b - a) \end{aligned}$$

- ✓ これは直線の「傾き m を持つ斜めの長さ」に一致！

9 さらにシンプルな場合

もし $f'(x) = 0$ なら

$$L = \int_a^b \sqrt{1} dx = b - a$$

- ✓ ただの横線の長さ！

✓ 最後に

この公式

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

は

「無限に細かく分割した線分長さの極限」

を正確に表したものです。

もし

- もっと具体例を見たい
- 図を描いて説明してほしい
- パラメータ表示の場合も知りたい

など、要望があればぜひ教えてください！



パラメータ表示の場合についても教えてください。

とても良いですね！

「パラメータ表示のとき、曲線の長さをどう求めるのか」について、**大学1年生向けにわかりやすく説明**します。

1 パラメータ表示とは？

ふつう $y = f(x)$ で書ける場合だけじゃなくて、

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

のように **パラメータ t** で表す場合があります。

✓ 例：

- 円： $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)

2 基本的なアイデア

パラメータ t を少し動かすと、曲線上の点がちょっと動く。

- パラメータが t から $t + \Delta t$ に動くとき
- 曲線上の位置が $(x(t), y(t))$ から $(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t))$ に動く

その「線分の長さ」は

$$\sqrt{(x(t + \Delta t) - x(t))^2 + (y(t + \Delta t) - y(t))^2}$$

3 Δt をとても小さくしたとき

$\Delta t \rightarrow 0$ で

$$x(t + \Delta t) - x(t) \approx x'(t)\Delta t$$

$$y(t + \Delta t) - y(t) \approx y'(t)\Delta t$$

この微小区間の「長さ」は

$$\begin{aligned} &\approx \sqrt{(x'(t)\Delta t)^2 + (y'(t)\Delta t)^2} \\ &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \Delta t \end{aligned}$$

✔ つまり

「長さ = 速さ × 時間」みたいな形になる

- $\sqrt{(x')^2 + (y')^2}$ は「速度の大きさ」

4 全体を足し合わせる（積分にする）

曲線全体（ t が α から β まで）の長さは

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

5 直感的まとめ

- ✔ 曲線をものすごく細かい線分で近似して足す
- ✔ 「微小な弦の長さ」が

$$\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

- ✔ これをパラメータ t で書くと

$$\begin{aligned} dx &= x'(t)dt, \quad dy = y'(t)dt \\ \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \end{aligned}$$

6 具体例

例① 半径 R の円周

$$\begin{aligned} x(t) &= R \cos t, \quad y(t) = R \sin t, \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \\ x'(t) &= -R \sin t, \quad y'(t) = R \cos t \\ \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} &= \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} = R \end{aligned}$$

- ✔ だから

$$L = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R$$

円周の公式が出た！

例② 直線のパラメータ表示

$$x(t) = at + x_0, y(t) = bt + y_0$$

$$x'(t) = a, y'(t) = b$$

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$L = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot (t_{end} - t_{start})$$

✓ 直線の長さ！

7 三次元の場合も同じ

もし

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

なら

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

✓ 最後のまとめ

パラメータ表示の曲線長公式

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

- 「無限に細かい線分の長さ」を足し合わせたもの
- 速度ベクトルの大きさを時間（パラメータ）で積分する形

もし

- もっと例を解きたい
- 3次元の場合の詳しい例
- 公式の厳密な導出

などあれば、ぜひ教えてください！



アステロイド曲線というものの長さもこのパラメータ表示の考え方で計算できると聞きました。これについて教えてください。

いいですね！とても良い質問です。

アステロイド曲線の長さを、パラメータ表示を使って計算する方法を、大学1年生向けにわかりやすく説明します。

✓ 1 まず「アステロイド曲線」とは

アステロイド (Astroid) は、次のようなパラメータ表示で表されます：

$$x = a \cos^3 t$$

$$y = a \sin^3 t$$

t は通常 $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲。

【図のイメージ】

- 星形の4つの「へこみ」がある
- 対称な曲線

✓ 重要：

- 曲線全体を一周するためには $t = 0$ から 2π まで動かす。

✓ 2 曲線長公式 (パラメータ表示)

パラメータ表示 $(x(t), y(t))$ での曲線の長さは：

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

✓ 3 アステロイドの微分を計算する

xの微分

$$x = a \cos^3 t$$

$$x'(t) = a \cdot 3 \cos^2 t \cdot (-\sin t) = -3a \cos^2 t \sin t$$

yの微分

$$y = a \sin^3 t$$

$$y'(t) = a \cdot 3 \sin^2 t \cos t = 3a \sin^2 t \cos t$$

✓ 4 $\sqrt{(x')^2 + (y')^2}$ を計算

$$(x'(t))^2 = 9a^2 \cos^4 t \sin^2 t$$

$$(y'(t))^2 = 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t$$

これを足す：

$$(x')^2 + (y')^2 = 9a^2 (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t)$$

因数分解：

$$= 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)$$

$$= 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t \cdot 1$$

$$= 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t$$

平方根を取ると：

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = 3a |\cos t \sin t|$$

✓ ここがポイント：

- 長さを計算する積分で符号は気にせず正の値で積分する

✓ 5 1周期分の長さの積分

$$L = \int_0^{2\pi} 3a |\cos t \sin t| dt$$

対称性を使う

アステロイドは4つの同じ「弧」からなる。

- $t = 0$ から $\pi/2$ までの1/4の弧の長さを計算し、それを4倍する。

区間 $[0, \pi/2]$ では $\cos t, \sin t$ は両方正

$$|\cos t \sin t| = \cos t \sin t$$

$$L = 4 \times \int_0^{\pi/2} 3a \cos t \sin t dt$$

$$= 12a \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t \, dt$$

積分公式：

$$\cos t \sin t = \frac{1}{2} \sin 2t$$

$$= 12a \times \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t \, dt$$

$$= 6a \int_0^{\pi/2} \sin 2t \, dt$$

$$= 6a \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\pi/2}$$

$$= -3a [\cos \pi - \cos 0]$$

$$= -3a [-1 - 1]$$

$$= -3a \times (-2) = 6a$$

✓ 最終答え

$$L = 6a$$

✓ 6 まとめ

- アステロイド曲線をパラメータ表示する

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$$

- 微分して $\sqrt{(x')^2 + (y')^2}$ を求める
- 積分して全周の長さを計算

✓ 結果：

アステロイドの1周の長さは $6a$

✓ 7 直感的なポイント

- 曲線長公式は「パラメータの速さ」を積分する形

$$L = \int \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt$$

- どんなパラメータ曲線でも同じ方法で計算可能！
-

もし

- 他のパラメータ曲線の長さもやってみたい
- 計算をもっと詳しくゆっくり
- アステロイドの面積も知りたい

などがあれば、ぜひ教えてください！