

不定積分と定積分



私は大学1年生で、あまり数学が得意ではありません。その私に、不定積分と定積分について、その定義や意味、そして関係性をわかりやすく教えてください。

とても良い質問です。大学1年生向けに、できるだけやさしく、でもきちんと説明しますね。

1 不定積分とは

不定積分は、「ある関数の原始関数を求める」ことです。

例えば：

問題: $f(x) = 2x$ の不定積分を求めよ。

答え: $\int 2x dx = x^2 + C$

ここで

- x^2 は、 $2x$ の原始関数。
- C は積分定数。なぜなら、微分するとき定数は消えるので、同じ微分結果 $2x$ になるからです。

つまり、不定積分は「微分を逆にやる操作」です。

◆ イメージ:

微分 ... 変化の割合を求める

不定積分 ... 変化の元を取り戻す

2 定積分とは

定積分は、「ある区間での面積（符号つき）」を求めるものです。

例えば：

問題: $f(x) = 2x$ を $x = 0$ から $x = 3$ まで積分せよ。

$$\int_0^3 2x dx = [x^2]_0^3 = 9 - 0 = 9$$

ここで

- $[x^2]_0^3$ は、「原始関数を 3 で評価 - 0 で評価」。
- **意味:** 曲線 $y = 2x$ と x 軸、 $x=0$ 、 $x=3$ で囲まれる部分の面積。

◆ イメージ:

定積分 ... 曲線の下での面積を求める

3 不定積分と定積分の関係（基本定理）

不定積分と定積分を結ぶのが **微積分の基本定理** です。

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

ここで

- $F(x)$ は $f(x)$ の不定積分（原始関数）。
- 定積分は、不定積分を使って区間での「変化量（面積）」を計算する。
 - ◆ **超重要ポイント:**
定積分を計算するには不定積分（原始関数）が必要！

4 まとめ

✓ 不定積分

- 微分の逆
- 「原始関数」を求める
- $\int f(x) dx = F(x) + C$

✓ 定積分

- 曲線下の面積を求める
- 区間 $[a, b]$ での「総変化」
- $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

✓ 両者の関係

- 定積分を解くには、不定積分（原始関数）が必要

もしさらに

- 図でのイメージ
- 具体例をもっと
- 計算練習

など希望があれば、どんどん聞いてください！



ありがとうございます。さらに、 $1/(1-x^2)^{1/2}$ の不定積分を教えてください。

とても良いですね！

次の不定積分を求めたいわけですね：

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

これはとても有名な公式があります：

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

したがって

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$$

✅ 答え：

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$$

✅ 意味・ポイント

- $\arcsin(x)$ は「 x の逆正弦関数」。
- 微分すると $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ になるので、不定積分は $\arcsin(x)$ になる。

もし

- どうしてそうなるの？
- 他の似た形の積分も知りたい！
- 逆三角関数って何？

なども気になったら、ぜひ教えてください。さらにわかりやすく説明します。



$1/(1+x^2)$ の不定積分はどうなりますか。

とても良い質問です！

次の不定積分を考えます：

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx$$

これは、これまたとても有名な公式です：

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

したがって

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$$

✓ 答え：

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$$

✓ ポイント

- $\arctan(x)$ は「 x の逆正接関数」です。
- 微分するとちょうど $\frac{1}{1+x^2}$ になります。

✓ 参考（覚えやすい形）

分母の形	不定積分
$\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$
$1+x^2$	$\arctan(x)$

他にも気になる積分があれば教えてください！



1/(cos(x)^2) の不定積分はどうなりますか

とても良いですね！

次は：

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx$$

ここで、 $\frac{1}{\cos^2(x)}$ は有名な三角関数の形で書けます：

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$$

そして、覚えておくと便利な公式は：

$$\frac{d}{dx} \tan(x) = \sec^2(x)$$

したがって

$$\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + C$$

✓ 答え：

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C$$

✓ ポイント

- $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ なので、 $\sec^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ 。
- 微分公式を知っているとすぐに積分が求められます。

✓ まとめ（覚えると便利な公式）

被積分関数	不定積分
$\sec^2(x)$	$\tan(x) + C$
$\csc^2(x)$	$-\cot(x) + C$

他にも「この形はどうなる？」などあれば、ぜひ気軽に聞いてください！



積分の変数変換について教えて下さい。

素晴らしい質問ですね！

「積分の変数変換」というのは、とても大事で便利なテクニックです。

大学1年生向けに、なるべくやさしく説明します。

✓ 1 変数変換とは？

積分を簡単な形に変えるために、**変数を置き換える**ことです。

$$x = g(u) \quad \text{など}$$

すると、元の変数での積分を新しい変数で書き直せます。

✓ 2 基本的な公式（不定積分）

もし $x = g(u)$ と置くと：

$$dx = g'(u) du$$

なので

$$\int f(x) dx = \int f(g(u)) g'(u) du$$

✓ イメージ

難しい関数を、計算しやすい形に変えるための「置換」。

✓ 3 具体例

例： $\int 2x \cos(x^2) dx$

ステップ：

1 置換を考える

$$u = x^2$$

2 微分して

$$du = 2x dx$$

3 積分を書き換える

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \int \cos(u) du$$

4 計算する

$$= \sin(u) + C$$

5 もとの変数に戻す

$$= \sin(x^2) + C$$

✓ 答え

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \sin(x^2) + C$$

✓ 4 定積分の場合

区間があるときは上下の範囲も変える！

$$\int_a^b f(x) dx$$

を $x = g(u)$ と置換すると

$$= \int_{u(a)}^{u(b)} f(g(u)) g'(u) du$$

例： $\int_0^1 2x \cos(x^2) dx$

同じように

- $u = x^2$
- $du = 2x dx$

範囲を変換：

- $x = 0 \implies u = 0$
- $x = 1 \implies u = 1$

計算：

$$\int_0^1 2x \cos(x^2) dx = \int_0^1 \cos(u) du = \sin(1) - \sin(0) = \sin(1)$$

✔ ポイントまとめ

★ 置換するとき

- 1 新しい変数を決める
- 2 微分して dx を書き換える
- 3 被積分関数を新しい変数に書き換える
- 4 定積分なら範囲も変換
- 5 計算して元に戻る（不定積分の場合）

「変数変換の例をもっと見たい」「定積分だけに特化して教えて」など、さらに知りたいところがあれば、ぜひ教えてください！



部分積分について教えてください。

とても良い質問です！

「積分の変数変換」に続いて、「部分積分」もとても大事な公式です。

✓ 1 部分積分とは？

部分積分は、積の微分の公式を逆に使う積分テクニックです。

✓ 積の微分公式（おさらい）

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

✓ 部分積分公式

積の微分公式を積分すると：

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx$$

よく次の形で使います：

$$\int u dv = uv - \int v du$$

✓ 2 公式のイメージ

「積の形の積分を、別の形に変える」道具です。

✓ 使いどころ：

- 積の形の積分
- 微分で簡単になる部分があるとき

✓ 3 ステップ（不定積分の場合）

1 u と dv を決める

$$\int u dv$$

2 du と v を計算する

$$du = u' dx, \quad v = \int dv$$

3 公式に当てはめる

$$\int u dv = uv - \int v du$$

✓ 4 具体例

例： $\int x e^x dx$

★ ステップ1： u, dv を決める

$$u = x \quad \rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = e^x dx \quad \rightarrow \quad v = e^x$$

★ ステップ2：公式を使う

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$

★ ステップ3：計算する

$$= x e^x - e^x + C$$

✓ 答え

$$\int x e^x dx = e^x(x - 1) + C$$

✓ 5 定積分の場合

区間 $[a, b]$ なら：

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$$

✓ 上下の範囲を必ずつける！

✓ 6 まとめ

★ 公式

$$\int u dv = uv - \int v du$$

★ ポイント

- 積の形を分解する
- 微分して簡単になる部分を u にする
- v を積分できる形にする

★ 使いやすい選び方（ヒント）

よく言われる覚え方：

✔ LIATEルール（優先的にuを選ぶ順）

- L: 対数 (log)
- I: 逆三角 (arctanなど)
- A: 代数 (xの多項式)
- T: 三角関数
- E: 指数関数

✔ 7 もうひとつの例

$$\int \ln(x) dx$$

★ 置き方：

$$u = \ln(x) \quad \rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx \quad \rightarrow \quad v = x$$

★ 計算：

$$\begin{aligned} \int \ln(x) dx &= x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln(x) - \int 1 dx \\ &= x \ln(x) - x + C \end{aligned}$$

✔ 答え

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + C$$

✔ 8 まとめのイメージ

部分積分 = 積の微分公式の逆利用！

- uを微分（簡単になるものを選ぶ）
- dvを積分（積分しやすいものを選ぶ）

もし

- 「定積分の部分積分をやりたい」
- 「別の例をもっと解きたい」
- 「どのuとdvを選ぶかもっと知りたい」

などがあれば、ぜひ教えてください！



$\int_0^{\pi/2} \cos^2(x) \sin(x) dx$ の値を、変数変換を用いて求めてください。

とても良い問題です！

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(x) \sin(x) dx$$

を **変数変換（置換積分）** で解いてみましょう。

✓ ステップ1：置換を決める

$$u = \cos(x)$$

✓ 微分すると：

$$du = -\sin(x) dx$$

つまり：

$$\sin(x) dx = -du$$

✓ ステップ2：区間を変換する

$x = 0$ のとき：

$$u = \cos(0) = 1$$

$x = \frac{\pi}{2}$ のとき：

$$u = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

✓ ステップ3：積分を書き換える

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) \sin(x) dx &= \int_{x=0}^{x=\pi/2} [\cos^2(x)] \sin(x) dx \\ &= \int_{u=1}^{u=0} u^2 \cdot (-du) \end{aligned}$$

$$= \int_1^0 -u^2 du$$

符号を整理すると：

$$= \int_0^1 u^2 du$$

✓ ステップ4：計算する

$$= \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

✓ 答え：

$$\boxed{\frac{1}{3}}$$

✓ ✓ まとめ

変数変換の流れ：

- 1 置換： $u = \cos(x)$
- 2 微分： $du = -\sin(x) dx$
- 3 範囲変換： $x = 0 \rightarrow u = 1, x = \pi/2 \rightarrow u = 0$
- 4 被積分関数変換： $\cos^2(x) = u^2, \sin(x) dx = -du$
- 5 積分を計算！

もし

- 途中のステップでもっと詳しく
- 別の変数変換の例
- 定積分の別の問題

など知りたければ、気軽に聞いてくださいね！



$\int_0^{\pi/2} \cos(x)^2 \sin(x) dx$ の値を、部分積分を用いて求めてください。

とても良い質問です！

今度は同じ積分を **部分積分** で解いてみましょう。

✓ 問題

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \sin(x) dx$$

✓ ステップ1：積の形を確認

$$\cos^2(x) \cdot \sin(x)$$

これを「部分積分」の形

$$\int u dv$$

にします。

✓ うまい選び方

- 微分して簡単になる方を **u** に。
- 積分しやすい方を **dv** に。

ここでは：

$$u = \cos^2(x)$$

$$dv = \sin(x) dx$$

✓ ステップ2：du と v を求める

$$du = 2 \cos(x)(-\sin(x)) dx = -2 \cos(x) \sin(x) dx$$

$$v = -\cos(x)$$

✓ ステップ3：部分積分公式

$$\int u dv = uv - \int v du$$

代入して：

$$= \cos^2(x) \cdot (-\cos(x)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos(x)] \cdot [-2 \cos(x) \sin(x)] dx$$

✓ 式を整理

$$= -\cos^3(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2(x) \sin(x) dx$$

✓ ステップ4：境界の値を計算

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \implies \cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos(0) = 1 \implies \cos^3(0) = 1$$

だから：

$$-\cos^3(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -[0 - 1] = 1$$

✓ これまでの結果：

$$= 1 - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \sin(x) dx$$

✓ ここで注目！

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \sin(x) dx$$

だったので、式は：

$$I = 1 - 2I$$

✓ ステップ5：Iを解く

$$I + 2I = 1$$

$$3I = 1$$

$$I = \frac{1}{3}$$

✓ 答え

$$\boxed{\frac{1}{3}}$$

✓ ✓ まとめ

★ 部分積分のポイント

- $u = \cos^2(x)$ (微分して簡単になる)
- $dv = \sin(x) dx$ (積分しやすい)

★ 部分積分公式を使うと

- 元の積分 I が右辺に現れる
- 方程式を作って解ける！

もし

- 「途中のどこかもっと詳しく」
- 「部分積分の別の例」

など知りたければ、ぜひ教えてください！



非ゼロな a に対して、 $(x^2+a)^{1/2}$ の不定積分はどうなりますか。どうやって計算すればよいですか。

とても良い質問ですね！
次の不定積分を求めたい：

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx$$

ここでは、 a は **0** でない定数とします。

✓ まず計算の方針

$$\sqrt{x^2 + a}$$

の形は「 x の2次式の平方根」です。
このタイプの積分は、**置換法 (変数変換)** や**部分積分**を使って解くのが基本です。

ここでは**部分積分**を使う標準的なやり方を説明します。

✓ ステップ1：形を分解する

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx$$

を

$$\int 1 \cdot \sqrt{x^2 + a} dx$$

と考えると、部分積分をします。

✓ 部分積分の公式：

$$\int u dv = uv - \int v du$$

✓ 選び方：

- $u = x$ (微分して簡単になる)
- $dv = \frac{\sqrt{x^2+a}}{x} dx$... これは少しやりづらい

そこで別のよく使う賢い選び方は：

✓ 置換を使ってもよいですが、この積分は「部分積分」的に

$$u = \sqrt{x^2 + a}, \quad dv = dx$$

というとても自然な分け方で解くのが定番です。

✓ **ステップ2：u と dv を決める**

$$u = \sqrt{x^2 + a}$$

$$dv = dx$$

✓ それぞれ計算：

$$du = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}} dx$$

$$v = x$$

✓ **ステップ3：部分積分公式に代入**

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a} dx &= uv - \int v du \\ &= x\sqrt{x^2 + a} - \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}} dx \end{aligned}$$

✓ **ステップ4：残りの積分を計算**

$$= x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}} dx$$

ここで分子を書き換える：

$$x^2 = (x^2 + a) - a$$

なので：

$$\begin{aligned} &= x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{(x^2 + a) - a}{\sqrt{x^2 + a}} dx \\ &= x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2 + a}{\sqrt{x^2 + a}} dx + a \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx \\ &= x\sqrt{x^2 + a} - \int \sqrt{x^2 + a} dx + a \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx \end{aligned}$$

ここで元の積分を I と書くと：

$$I = x\sqrt{x^2 + a} - I + a \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx$$

$$2I = x\sqrt{x^2 + a} + a \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx$$

✓ ここで：

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$$

これは有名な形です。

✓ したがって：

$$2I = x\sqrt{x^2 + a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$$

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$$

✓ ✓ 最終答え

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$$

✓ ✓ まとめ

★ 部分積分を使う流れ：

1 $u = \sqrt{x^2 + a}$ 、 $dv = dx$

2 $du = \frac{x}{\sqrt{x^2+a}} dx, v = x$

3 部分積分公式を使う

4 分子を書き換え、元の積分を含む式を解く

もし

- 途中の計算をもっと詳しく
- 定積分バージョン
- 似た積分の解き方

など、知りたければぜひ教えてください！



ありがとうございます。では、 $1/((x^2+a)^{1/2})$ の不定積分はどうなりますか。どうやって計算すればよいですか。

とても良い流れです！

今度は：

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx$$

を求めたい、ということですね。

✓ 重要ポイント

この積分の形は、分母に「 $\sqrt{x^2+a}$ 」がある**有名な形**です。

a が 0 でないことを仮定します。

この積分は、a が正か負かで少し結果の形が変わります。

でもまずは一般の公式を紹介してから、 $a > 0$ と $a < 0$ に分けて説明します。

✓ 公式の導出 ($a > 0$ の場合)

まず、 $a > 0$ のとき。

ステップ1 三角関数の置換

$$x = \sqrt{a} \sinh(u)$$

✓ すると：

$$dx = \sqrt{a} \cosh(u) du$$

$$\sqrt{x^2+a} = \sqrt{a \sinh^2(u) + a} = \sqrt{a} \cosh(u)$$

✓ 被積分関数：

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \frac{1}{\sqrt{a} \cosh(u)} \cdot \sqrt{a} \cosh(u) du = du$$

✓ 積分：

$$\int du = u + C$$

✓ もとの変数に戻す：

$$u = \sinh^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{a}} \right)$$

✓ 最終答え ($a > 0$)：

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \sinh^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{a}} \right) + C$$

✓ ちなみに $\sinh^{-1}(z)$ は**逆双曲線正弦関数**で、対数の形でも書けます：

$$\sinh^{-1}(z) = \ln \left| z + \sqrt{z^2 + 1} \right|$$

したがって：

$$\begin{aligned} &= \ln \left| \frac{x}{\sqrt{a}} + \sqrt{\frac{x^2}{a} + 1} \right| + C \\ &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C \end{aligned}$$

✓ 結論 ($a > 0$ のとき)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$$

✓ $a < 0$ の場合

もし $a < 0$ なら、書き換えると：

$$a = -b \quad (b > 0)$$

$$\sqrt{x^2 + a} = \sqrt{x^2 - b}$$

その場合、積分は：

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - b}} dx$$

これは逆三角関数 ($\backslash\text{arcosh}$) の形になります：

$$= \ln \left| x + \sqrt{x^2 - b} \right| + C$$

(または $\backslash\text{arcosh}$ で書くこともできます。)

✓ 結局、**a が正でも負でも**一般にまとめると：

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$$

✓ ✓ ポイントまとめ

★ この積分は超有名：

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$$

✓ 計算の流れ

- 1 三角・双曲線の置換
- 2 被積分関数がきれいに du に変わる
- 3 逆関数や対数に戻す

もし

- 置換の詳細をもっと
- $a < 0$ の場合をもっと
- 別の方法での導出
- 逆双曲線関数の説明

などあれば、どんどん聞いてくださいね！