

f(x) テイラー展開



私は大学で理系の学問を学ぶ1年生です。関数 $f(x) = x \sin(x)$ の $x=0$ 周囲での Taylor 展開を5次まで展開した形で示してください。

はい、関数 $f(x) = x \sin(x)$ を $x = 0$ のまわりでテイラー展開すると、以下のように展開できます (5次まで) :

Step 1: $\sin(x)$ のテイラー展開 (既知)

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Step 2: $x \sin(x)$ を展開する

$$f(x) = x \cdot \sin(x) = x \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots \right)$$

掛け算すると :

$$f(x) = x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120} - \dots$$

Step 3: 5次までの項を取り出す

5次までの項というのは、 x^5 以下の項までという意味なので :

$$f(x) = x^2 - \frac{x^4}{6} + \mathcal{O}(x^6)$$

答え (5次まで) :

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \mathcal{O}(x^6)$$

必要であれば、6次以上の項も続けて展開できますので、お申し付けください。



関数 $\log(x)$ を $x=1$ の周囲で Taylor 展開してください。やはり5次まで展開した形で示してください。

はい、関数 $\log(x)$ を $x = 1$ のまわりでテイラー展開して、5次までの形で示します。

Step 1: テイラー展開の一般形

ある関数 $f(x)$ を点 a のまわりで展開すると、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots$$

Step 2: $f(x) = \log(x)$ を $a = 1$ のまわりで展開

まず、導関数を調べます：

- $f(x) = \log(x)$
- $f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$
- $f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$
- $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$
- $f^{(5)}(x) = \frac{24}{x^5}$

これらを $x = 1$ に代入すると：

- $f(1) = 0$
 - $f'(1) = 1$
 - $f''(1) = -1$
 - $f^{(3)}(1) = 2$
 - $f^{(4)}(1) = -6$
 - $f^{(5)}(1) = 24$
-

Step 3: テイラー展開（5次まで）

$$\begin{aligned} \log(x) &= 0 + 1(x - 1) + \frac{-1}{2!}(x - 1)^2 + \frac{2}{3!}(x - 1)^3 \\ &\quad + \frac{-6}{4!}(x - 1)^4 + \frac{24}{5!}(x - 1)^5 + \mathcal{O}((x - 1)^6) \\ &= (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4 + \frac{1}{5}(x - 1)^5 + \mathcal{O}((x - 1)^6) \end{aligned}$$

✓ 答え（5次まで）：

$$\log(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4 + \frac{1}{5}(x - 1)^5 + \mathcal{O}((x - 1)^6)$$

これは $x = 1$ のまわり（つまり $x \approx 1$ ）でのテイラー展開です。任意の次数まで続けることもできますので、必要であればお知らせください。



$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{x^2} - \cos(x)) / (x \sin(x))$ を求めて下さい。なるべく計算過程も示してください。

極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x \sin(x)}$$

を求めます。以下、できるだけ詳しく計算過程を示して進めます。

ステップ1: 分子と分母のテイラー展開

まず、 $x \rightarrow 0$ なので、テイラー展開を使って近似します。

e^{x^2} のテイラー展開 ($x = 0$ のまわり) :

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots$$

$\cos(x)$ のテイラー展開 :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$$

したがって、分子 $e^{x^2} - \cos(x)$ は :

$$\begin{aligned} e^{x^2} - \cos(x) &= \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \dots\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots\right) \\ &= x^2 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \dots \\ &= \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{24}x^4 + \dots \end{aligned}$$

$\sin(x)$ のテイラー展開 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

したがって、分母 $x \sin(x)$ は :

$$x \sin(x) = x \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right) = x^2 - \frac{x^4}{6} + \dots$$

ステップ2: 分子と分母を代入して比を取る

$$\frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x \sin(x)} = \frac{\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{24}x^4 + \dots}{x^2 - \frac{x^4}{6} + \dots}$$

分子・分母ともに x^2 を因数に持っているので、約分できます：

$$= \frac{\frac{3}{2} + \frac{11}{24}x^2 + \dots}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \dots}$$

ステップ3: 極限を取る

$x \rightarrow 0$ とすると、 $x^2 \rightarrow 0$ なので：

$$\frac{\frac{3}{2} + o(1)}{1 + o(1)} \rightarrow \frac{3}{2}$$

✓ 答え：

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x \sin(x)} = \frac{3}{2}}$$

必要であれば、ロピタルの定理を使った別解も示せます。