

高階微分の応用例



私は大学で理系の学問を学ぶ1年生です。私にわかるように、関数の高階微分が役に立つ応用例を教えてください。

もちろんです！理系の大学1年生にわかるように、「関数の高階微分（2階微分、3階微分など）」がどんな応用に使われているのかを、いくつか身近な例で紹介しますね。

① 物理：運動の記述

🔧 応用分野：力学（高校でも少し出てきます）

- 位置 $x(t)$ を時間 t の関数とすると：
 - 1階微分：速度 $v(t) = x'(t)$
 - 2階微分：加速度 $a(t) = x''(t)$
 - 3階微分：加加速度 (jerk) $j(t) = x'''(t)$

💡 なぜ高階微分が必要？

- ロボットや自動車の制御では、「急激な加速度の変化 (jerk)」があると機械に負担がかかるので、jerk まで制御する設計が行われます。

② 数学：極値や凸性の判定

🔧 応用分野：最適化・関数の形の解析

- 極値（最大・最小）を調べる時、1階微分で増減、2階微分で凸 or 凹を判定します。
- でも2階微分がゼロだったら？
 - 3階、4階...と高階微分で精密に判定します。

💡 具体例：

- 関数 $f(x) = x^4$ の導関数は $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, ...と続きます。
- $x = 0$ が極値かどうかは、2階以上の微分まで見ないと判断できません。

③ 工学：信号処理・画像処理

🔧 応用分野：信号処理やエッジ検出

- 画像の中で「変化が急な部分（＝輪郭）」を検出するために、**2階微分（ラプラシアン）**を使います。

💡 **たとえば：**

- モノの輪郭を検出するフィルター（ラプラシアンフィルター）は、画素の2階微分に相当する処理をしています。

④ 数値解析・シミュレーション

🔧 **応用分野：偏微分方程式の近似解**

- 波の伝わり方、熱の伝導、流体の動きなどを表す方程式には、**2階以上の微分が登場**します。
- それらを計算機でシミュレーションするために、**高階微分の近似や離散化**が必要です。

⑤ 機械学習・AI（やや発展）

🔧 **応用分野：最適化・モデルの訓練**

- 「ニューラルネット」の学習では、損失関数を最小化します。
- 勾配（1階微分）だけでなく、**ヘッセ行列（2階微分）**を使った高度な最適化手法（ニュートン法など）もあります。

★ まとめ

高階微分	応用例	なぜ必要か
2階	加速度・関数の凸凹・熱伝導	変化の変化を捉えるため
3階以上	jerk・最適化・関数の詳細な判定	精密な制御・解析が可能になる

気になる分野があれば、それに合わせた例をさらに詳しく説明することもできますよ！



$f(x) = x^2 - 3$ の近似解を求めようと思います。最初の近似値 $x = 2$ から始めて、ニュートン法の反復を3回適用して得られる近似値を求めてください。

了解しました。関数 $f(x) = x^2 - 3$ に対して、ニュートン法を用いて近似解を求めていきます。

🔧 ステップ0：ニュートン法の公式

ニュートン法の反復式は：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ここで、

- $f(x) = x^2 - 3$
- $f'(x) = 2x$

1 2 3 4 ステップ 1：初期値 $x_0 = 2$

1回目の反復 (x_1) :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{2^2 - 3}{2 \cdot 2} = 2 - \frac{1}{4} = 1.75$$

2回目の反復 (x_2) :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.75 - \frac{1.75^2 - 3}{2 \cdot 1.75}$$

まず中の計算：

- $1.75^2 = 3.0625$
- $f(1.75) = 3.0625 - 3 = 0.0625$
- $f'(1.75) = 3.5$

したがって：

$$x_2 = 1.75 - \frac{0.0625}{3.5} = 1.75 - 0.01785714 \approx 1.73214286$$

3回目の反復 (x_3) :

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.73214286 - \frac{(1.73214286)^2 - 3}{2 \cdot 1.73214286}$$

- $(1.73214286)^2 \approx 2.999695$
- $f(x_2) \approx -0.000305$ → この値がちょっとズれている。その為、
- $f'(x_2) \approx 3.4642857$

$$x_3 = 1.73214286 - \frac{-0.000305}{3.4642857} \approx 1.73214286 + 0.000088 = 1.732231$$

この答が少し悪く
なっている。

✓ 結果まとめ

ニュートン法による3回の反復で得られる近似値は：

$$x_3 \approx \boxed{1.732231}$$

計算としては
正しくない...

これは、 $\sqrt{3} \approx 1.73205$ にかなり近い値ですね。ニュートン法の収束の速さがよくわかります。



$(x^2+x)\cos(x)$ の3階導関数を求めてください。

関数

$$f(x) = (x^2 + x) \cos(x)$$

の3階導関数（第3次導関数）を求めます。

★ ステップ1：積の微分の準備

まずは、関数を積の形として、

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

とおきます：

- $u(x) = x^2 + x$
- $v(x) = \cos(x)$



ステップ2：1階導関数

積の微分法則を使います：

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

- $u'(x) = 2x + 1$
- $v'(x) = -\sin(x)$

したがって：

$$f'(x) = (2x + 1) \cos(x) - (x^2 + x) \sin(x)$$



ステップ3：2階導関数

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[(2x + 1) \cos(x)] - \frac{d}{dx}[(x^2 + x) \sin(x)]$$

まずはそれぞれ個別に微分：

(a) $(2x + 1) \cos(x)$ の微分 :

$$= (2x + 1)' \cos(x) + (2x + 1)(-\sin(x)) = 2 \cos(x) - (2x + 1) \sin(x)$$

(b) $(x^2 + x) \sin(x)$ の微分 :

$$= (2x + 1) \sin(x) + (x^2 + x) \cos(x)$$

したがって :

$$\begin{aligned} f''(x) &= [2 \cos(x) - (2x + 1) \sin(x)] - [(2x + 1) \sin(x) + (x^2 + x) \cos(x)] \\ &= 2 \cos(x) - (2x + 1) \sin(x) - (2x + 1) \sin(x) - (x^2 + x) \cos(x) \\ &= [2 - (x^2 + x)] \cos(x) - 2(2x + 1) \sin(x) \end{aligned}$$

」 ここまでは正しい。

ステップ 4 : 3階導関数

$$f'''(x) = \frac{d}{dx} ([2 - (x^2 + x)] \cos(x) - 2(2x + 1) \sin(x))$$

また積の微分を使います :

(a) $[2 - (x^2 + x)] \cos(x)$ の微分

- $w(x) = 2 - x^2 - x$
- $w'(x) = -2x - 1$

$$= w'(x) \cos(x) + w(x)(-\sin(x)) = (-2x - 1) \cos(x) - (2 - x^2 - x) \sin(x)$$

(b) $-2(2x + 1) \sin(x)$ の微分

- $= -2[(2x + 1)' \sin(x) + (2x + 1) \cos(x)]$
- $= -2[2 \sin(x) + (2x + 1) \cos(x)]$

したがって :

$$f'''(x) = (-2x - 1) \cos(x) - (2 - x^2 - x) \sin(x) + 4 \sin(x) + 2(2x + 1) \cos(x)$$

整理します :

- $(-2x - 1) + 2(2x + 1) = 2x + 1$
- $-(2 - x^2 - x) \sin(x) + 4 \sin(x) = (x^2 + x + 2) \sin(x)$

よって、

$$f'''(x) = (2x + 1) \cos(x) + (x^2 + x + 2) \sin(x)$$

負符号
ここは正しくは " - " のはず。
ミスしている。

← 正しくない。

✓ 最終結果

✓ 正しい。

$$f'''(x) = (2x + 1) \cos(x) + (x^2 + x + 2) \sin(x)$$

ニュートン法 近似解



$f(x) = x^2 - 3$ の近似解を求めようと思います。最初の近似値 $x = 2$ から始めて、ニュートン法の反復を3回適用して得られる近似値を求めてください。

python ← プログラムを組んで計算している...

```
# ニュートン法を用いて  $f(x) = x^2 - 3$  の近似解を求める
def f(x):
    return x**2 - 3

def f_prime(x):
    return 2*x

# 初期値
x = 2

# ニュートン法の反復を3回実行
for _ in range(3):
    x = x - f(x)/f_prime(x)

x
```

結果
1.7320508100147276 ← 当然、正しい。

ニュートン法を初期値 $x = 2$ から始めて3回反復適用した結果、近似解は約 1.7320508100147276 となります。



計算過程も一緒に示してください。

```
python

# ニュートン法の各反復の計算過程を記録
x_values = [2] # 初期値

# ニュートン法の反復を3回実行
for _ in range(3):
    x_new = x_values[-1] - f(x_values[-1]) / f_prime(x_values[-1])
    x_values.append(x_new)

# 計算過程をデータフレームで示す
import pandas as pd

df = pd.DataFrame({
    'Step': range(len(x_values)),
    'x': x_values,
    'f(x)': [f(x) for x in x_values]
})
```

```
import ace_tools as tools; tools.display_dataframe_to_user(name="Newton's Method Iterations", dataf
```

結果

	Step	x	f(x)
0	0	2.000000	1.000000e+00
1	1	1.750000	6.250000e-02
2	2	1.732143	3.188776e-04
3	3	1.732051	8.472674e-09

Newton's Method Iterations

	Step	x	f(x)	
1	0	2.0	1.0	
2	1	1.75	0.0625	
3	2	1.7321428571428572	0.00031887755102077975	
4	3	1.7320508100147276	8.47267411785424e-09	
	Step	x	f(x)	

ニュートン法の反復計算過程を表で示しました。ご確認ください。



$(x^2+x)\cos(x)$ の3階導関数を求めてください。

python

```
from sympy import symbols, diff, cos
```

```
# 記号変数を定義
```

```
x = symbols('x')
```

```
# 関数の定義
```

```
f = (x**2 + x) * cos(x)
```

```
# 3階導関数を計算
```

```
third_derivative = diff(f, x, 3)
```

```
third_derivative.simplify()
```

数式処理ライブラリ SymPy を
用いている。

やはり正しい。

結果

```
x*(x + 1)*sin(x) - (6*x + 3)*cos(x) - 6*sin(x)
```


与えられた関数 $(x^2 + x) \cos(x)$ の3階導関数は、以下のようになります：

$x(x + 1)\sin(x) - (6x + 3)\cos(x) - 6\sin(x)$ \]