

ロピタルの定理



$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - \cos(x))/x$ をロピタルの定理を用いて計算してください。

与えられた極限：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos(x)}{x}$$

は、分子・分母とも $x \rightarrow 0$ で連続かつ微分可能で、分子も分母も 0 に近づくため、不定形 $\frac{0}{0}$ になります。よって **ロピタルの定理**が適用できます。

ステップ 1: 分子・分母をそれぞれ微分

- 分子の微分：

$$\frac{d}{dx}(e^{2x} - \cos(x)) = 2e^{2x} + \sin(x)$$

- 分母の微分：

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

ステップ 2: 微分後の極限をとる

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} + \sin(x)}{1} = 2e^0 + \sin(0) = 2 \cdot 1 + 0 = 2$$

結論：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos(x)}{x} = \boxed{2}$$

必要であれば、テイラー展開を使った別解も示せます。ご希望ですか？



同様に、 $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$ をロピタルの定理を用いて計算してください。

極限：

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x$$

をロピタルの定理を用いて計算します。これは一見ロピタルの定理の形ではありませんが、指数・対数変換により適用可能な形に変換できます。

ステップ 1: 対数を取る

$$x^x = e^{x \log x}$$

よって、

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \log x} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} x \log x}$$

ここで問題は

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x$$

ステップ 2: $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x$ をロピタルの定理で求める

このままだと $0 \cdot (-\infty)$ の形ですが、ロピタルの定理を使うために形を変えます：

$$x \log x = \frac{\log x}{1/x}$$

これは $\frac{-\infty}{\infty}$ の形になります ($\log x \rightarrow -\infty, 1/x \rightarrow \infty$) ので、ロピタルの定理が適用可能です。

微分して：

- 分子： $\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$
- 分母： $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$

したがって：

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} -x = 0$$

ステップ 3: 元の極限に戻る

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = e^{\lim_{x \rightarrow +0} x \log x} = e^0 = \boxed{1}$$

結論：

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = \boxed{1}$$

必要であれば、グラフ的直感やテイラー展開の視点からの補足も可能です。



微分を用いて増減を調べたうえで、 $y(x) = x \log(x)$ のグラフの概形を描いてください。

関数 $y(x) = x \log x$ の増減とグラフの概形を調べてみましょう。定義域は通常 $x > 0$ です（自然対数 $\log x$ の定義による）。

1. 導関数と増減

関数：

$$y(x) = x \log x$$

導関数は積の微分を使って：

$$y'(x) = \frac{d}{dx}(x \log x) = \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

解析：

- $y'(x) = \log x + 1$
- これは $y'(x) = 0$ となるのは $\log x = -1$ のとき、つまり：

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

増減表：

区間	導関数 $y'(x)$	増減
$0 < x < 1/e$	$\log x + 1 < 0$	減少
$x = 1/e$	$\log(1/e) + 1 = 0$	極小値
$x > 1/e$	$\log x + 1 > 0$	増加

したがって、 $x = 1/e$ に極小値をもちます。

2. 特徴的な値

- $y(1) = 1 \cdot \log 1 = 0$
- $y(1/e) = \frac{1}{e} \cdot \log\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot (-1) = -\frac{1}{e}$
- $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ （前述の通り）
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x \log x = \infty$

3. グラフの概形

- $x > 0$ の範囲で定義される。
- $x \rightarrow 0^+$ では $y(x) \rightarrow 0$ だが、導関数は急速に減少している。

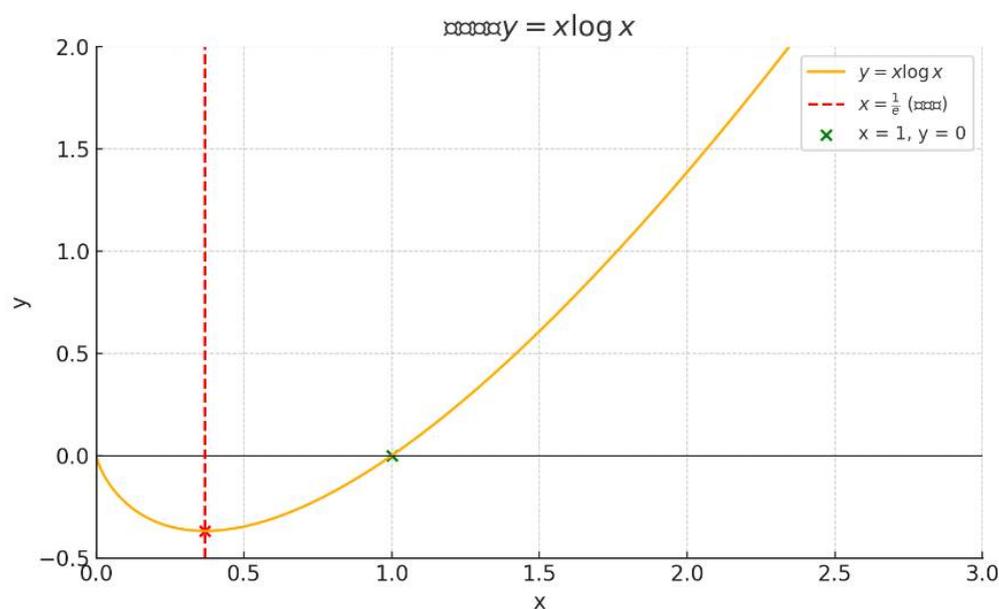
- $x = \frac{1}{e}$ で極小値 $-\frac{1}{e}$ をとる。
- $x = 1$ で $y = 0$ を再び通る。
- $x \rightarrow \infty$ では $y(x) \rightarrow \infty$

概形図 (描画)

以下にグラフを描画します。

概形図: $y = x \log x$

インタラクティブになりました。(ベータ版) ✨



上図は関数 $y = x \log x$ のグラフです。

グラフの特徴まとめ:

- 定義域: $x > 0$
- 極小値: $x = \frac{1}{e}$ で極小値 $y = -\frac{1}{e}$
- 増減:
 - $0 < x < \frac{1}{e}$ では減少
 - $x > \frac{1}{e}$ では増加
- 通過点: $(1, 0)$ を通る
- 漸近挙動:
 - $x \rightarrow 0^+$ で $y(x) \rightarrow 0$
 - $x \rightarrow \infty$ で $y(x) \rightarrow \infty$

必要であれば、接線 (たとえば $x = 1$ におけるもの) なども描画できます。ご希望ですか？



Taylor展開を用いずに、 $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin(x))/(x^3)$ を計算してください。

極限：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

を **Taylor展開を使わず**に計算したい、とのことですね。ここでは **ロピタルの定理**を繰り返し使って求めましょう。まず、この極限は $\frac{0}{0}$ の不定形になるのでロピタルの定理が適用可能です。

🔄 第1回ロピタルの定理：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$$

🔄 第2回ロピタルの定理：

再び $\frac{0}{0}$ の形なのでロピタルを使えます：

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x}$$

🔄 第3回ロピタルの定理：

再び $\frac{0}{0}$ の形：

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

✅ 結論：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

Taylor 展開を使わなくても、ロピタルの定理を3回使えば求まります。