

逆関数の導関数



関数 $y(x) = \sqrt{x}$ の導関数が $y = 1/(2\sqrt{x})$ になることを、この $y(x)$ が $y(x)=x^2$ の逆関数であることから導出できますか？

はい、関数 $y(x) = \sqrt{x}$ の導関数を、その関数が $y(x) = x^2$ の逆関数であることから導出することは可能です。以下にその理論と手順を示します。

背景理論：逆関数の微分法

関数 $y = f(x)$ が微分可能で、逆関数 $x = f^{-1}(y)$ が存在するとき、逆関数の導関数は次のように表されます：

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{ただし } x = f^{-1}(y)$$

適用例： $y(x) = \sqrt{x}$

Step 1: 関数と逆関数の関係

関数 $y = \sqrt{x}$ は、関数 $x = y^2$ の逆関数です。つまり：

$$\sqrt{x} = f^{-1}(x) \quad \text{ただし } f(y) = y^2$$

Step 2: 元の関数 $f(y) = y^2$ の導関数

$$f'(y) = \frac{d}{dy}y^2 = 2y$$

Step 3: 逆関数の導関数の公式の適用

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{2y}$$

ただしここで $y = \sqrt{x}$ だから：

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

結論

したがって、 $y = \sqrt{x}$ の導関数が $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ であることは、関数が $y = x^2$ の逆関数であることを利用して導出できます。

何か他の逆関数でも試してみませんか？



同様に、 $y(x) = \arcsin(x)$ の導関数を $y(x)$ が $y(x) = \sin(x)$ の逆関数であることから導出してください。

はい、関数 $y(x) = \arcsin(x)$ の導関数を、この関数が $y = \sin(x)$ の逆関数であることから導出することが可能です。以下に丁寧に説明します。

逆関数の微分公式の再確認

ある関数 f とその逆関数 f^{-1} に対して：

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Step 1: 関数と逆関数の関係

$$y = \arcsin(x) \iff x = \sin(y)$$

ここで、 $\arcsin(x)$ は $\sin(x)$ の逆関数（ただし、 $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で定義される）です。

Step 2: 元の関数 $f(y) = \sin(y)$ の導関数

$$f'(y) = \cos(y)$$

Step 3: 逆関数の導関数を計算

逆関数の導関数公式を用いると：

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(y)}$$

ここで $y = \arcsin(x)$ 、つまり $\sin(y) = x$ なので、三角恒等式より：

$$\cos(y) = \sqrt{1 - \sin^2(y)} = \sqrt{1 - x^2}$$

(※ $\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ の範囲では $\cos(y) \geq 0$ なので、正の平方根でよい)

結論

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

このように、 $y = \arcsin(x)$ の導関数は、逆関数微分法を使って正しく導出可能です。

ほかの逆三角関数（たとえば $\arctan(x)$ など）でも試してみますか？



$y(x) = x^x$ は $y(x) = \exp(x \log(x))$ となるため $\exp$ という関数と $x \log(x)$ という関数の合成関数だと考えられるので、合成関数の微分を用いて $y(x)$ の導関数を導出してください。

はい、関数 $y(x) = x^x$ の導関数は、

$$y(x) = \exp(x \log x)$$

と書けることから、**合成関数の微分法（連鎖律）**を使って導出できます。

💡 目的

$$y(x) = x^x \quad \text{の導関数} \quad y'(x) = \frac{d}{dx} x^x$$

✅ Step 1: 対数を使った変形

まず、指数関数として書き換え：

$$y(x) = x^x = \exp(x \log x)$$

ここで、外側が $\exp(u)$ 、内側が $u = x \log x$ という合成関数になっています。

✅ Step 2: 合成関数の微分（連鎖律）

合成関数 $y(x) = \exp(u(x))$ の微分は：

$$\frac{d}{dx} \exp(u(x)) = \exp(u(x)) \cdot u'(x)$$

ここで $u(x) = x \log x$ の導関数 $u'(x)$ をまず求めます。

✅ Step 3: $u(x) = x \log x$ の導関数

これは積の微分法で：

$$\frac{d}{dx} (x \log x) = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

✓ Step 4: 全体の導関数

したがって：

$$\frac{d}{dx}x^x = \frac{d}{dx}\exp(x \log x) = \exp(x \log x) \cdot (\log x + 1)$$

元の形に戻すと：

$$\frac{d}{dx}x^x = x^x(\log x + 1)$$

🔒 注意点：定義域

この導関数の式は $x > 0$ においてのみ定義されます ($\log x$ が定義されている必要があるため)。

他の指数関数や変形例でも微分してみたい関数はありますか？



曲線 $y(x) = x \log(x)$ に $x=1$ で接する接線の式を導出してください。

関数 $y(x) = x \log x$ のグラフにおける、点 $x = 1$ における接線の方程式を導出します。

✓ ステップ 1: 接点の座標

まず、関数値を計算：

$$y(1) = 1 \cdot \log 1 = 1 \cdot 0 = 0$$

したがって、接点の座標は

$$(1, 0)$$

✓ ステップ 2: 傾き (導関数の値)

関数の導関数を求めます：

$$y(x) = x \log x \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \log x + 1$$

これを $x = 1$ に代入：

$$y'(1) = \log 1 + 1 = 0 + 1 = 1$$

したがって、傾きは 1

✓ ステップ 3: 接線の方程式

点 $(x_0, y_0) = (1, 0)$ 、傾き $m = 1$ の直線の方程式は：

$$y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1$$

✓ 結論

関数 $y = x \log x$ における、点 $x = 1$ での接線の式は

$y = x - 1$

他の点での接線や、法線も知りたい場合はお知らせください。