

中間値の定理の意義



自分は理系の大学1年生です。微分積分学を学び始めたところなのですが、中間値の定理があまりにも当たり前に見え、「定理」と読んでいる理由がわかりません。これをわざわざ「定理」扱いする理由を教えてください。

「当たり前」に感じられるのに、なぜ“定理”なのか

——中間値の定理（IVT）を“わざわざ証明する”意味

目に見える主張	背後で要求される論理
連続関数 f が区間 $[a, b]$ で値を取り、	
$f(a)$ と $f(b)$ が正負異符号なら、	
その途中で $f(c) = 0$ となる点 c がある。	1. 「連続」の厳密な定義

2. 実数が“切れ目なく”並んでいる（完備性）

3. その完備性を使った論理的な構成（上限・下限や区分的二分法） |

当たり前に感じる理由は 日常の実数感覚 にあります。しかし「当たり前かどうか」と「真かどうか」は別問題です。数学では

公理（信じることにしたルール）



定理（公理だけから論理的に導ける命題）

という階層を区別します。IVT は「完備実数の連続性」を使えば証明できる——ゆえに「定理」なのです。

1. “直感”と“証明”のズレ

直感

グラフを描けば線は途切れずに紙面を横切る。途中で上から下へ通過すれば必ず 0 を越えるだろう。

客観的に示さねばならない点

1. “線が途切れない”の定義は何か？

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ という ϵ - δ 連続が必要。

2. “実数は切れ目がない”をどう言語化するか？

→ 最小上界（supremum）性質＝完備性公理。

3. その上で「0 になる点の存在」を 論理だけで導く 必要がある。

（典型証明：負→正に変わる最小の x を $c = \inf\{x \mid f(x) \geq 0\}$ と取り、連続性と完備性で $f(c) = 0$

を示す。)

2. 完備性のない世界では成り立たない

同じ主張を 有理数 $\mathbb{Q}$ 上で試すと失敗します。

$$f(x) = x^2 - 2, \quad x \in \mathbb{Q}, \quad a = 1, b = 2$$

- $f(1) = -1, f(2) = 2$ で符号が異なる。
- しかし $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ 。
- 有理数上には $f(x) = 0$ を満たす点がない。

「線が途中で切れる」世界を実際に見せてくれる例で、IVT が “実数の特殊性” に深く依存することがわかります。

3. 歴史的背景

年	人物	何をしたか
1817	ベルナルト・ボルツァーノ	ϵ - δ を使わず区分的二分法で初めて厳密証明を試みる。
1872	ワイエルシュトラス/デデキント	実数の完備性を公理化し、ボルツァーノの証明を近代的に整理。
20 世紀	教科書へ定着	“連続関数の最重要基本定理” として標準カリキュラムへ。

当時「連続」「実数」「証明」がまだ曖昧だったため、「直感的に明らか”な事実すら証明が要る」と強調されました。

4. 現代数学での位置づけと応用

1. 数値解析

- 二分法・ニュートン法など「方程式の解が区間に存在する」ことの保証。

2. トポロジーの基礎

- 実数直線の連結性 $\leftrightarrow$ IVT は同値。

3. 解析学その他定理の礎

- ロルの定理・平均値の定理・微分積分学の基本定理など、IVT を一歩目に組み立てる。

5. まとめ —— “わざわざ定理”にする理由

1. 証明には完備性公理が不可欠：

実数特有の性質ゆえに“直感”では済まない。

2. 代替公理系では偽となる：

有理数上での反例が「証明が必要」な証左。

3. 多くの重要結果の土台：

IVT が崩れると微積分の主要定理もドミノ倒しで崩れる。

「当たり前」に見える事実ほど、どこに“当たり前でない要素”が隠れているかを明示するのが数学の証明。

その代表例が中間値の定理なのです。

極限計算方法



$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos(x))/x^2$ を Taylor 展開を使わずに計算する方法を教えてください。

以下では $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ を **テイラー展開を一切使わずに** 求める代表的な二つの手順を示します。ポイントは

1. 三角恒等式で「sin の極限」に帰着させる
2. 「 $\sin t/t \rightarrow 1$ 」を幾何学的不等式（扇形の面積比較）で証明するという流れです。

1. 恒等式で形を整える

$$1 - \cos x = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

したがって

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \right)^2.$$

ここで $u = \frac{x}{2}$ と置くと $u \rightarrow 0$ なので、求める極限は

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} \right)^2$$

となります。よって残された仕事は

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

をテイラー展開を使わずに示すことです。

2. 幾何学的不等式で $\sin u/u$ の極限を証明する

半径 1 の円において、扇形（中心角 $u > 0$ ）と、その内接三角形・外接三角形の面積を比べます（図を想像してください）。

図形	面積
内接三角形	$\frac{1}{2} \sin u$
扇形	$\frac{1}{2} u$
外接三角形	$\frac{1}{2} \tan u$

面積の大小関係から

$$\sin u < u < \tan u \quad (0 < u < \frac{\pi}{2})$$

が得られます。両辺を $\sin u$ で割ると

$$1 < \frac{u}{\sin u} < \frac{1}{\cos u}.$$

極限 $u \rightarrow 0^+$ で $\cos u \rightarrow 1$ なので、はさみうちの原理より

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

が従います（符号を変えれば $u \rightarrow 0^-$ でも同値です）。

3. まとめ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

4. 参考：別の「テイラー不使用」アプローチ

- ロピタルの定理

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}.$$

ただしロピタルを使う場合も結局 $\sin x/x \rightarrow 1$ の証明は必要なので、上の幾何学的不等式が裏付けになります。

- 三平方不等式による両側評価

$0 < 1 - \cos x < \frac{x^2}{2}$ を直接示し、

$$0 < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2}$$

と、もう一方では $\sin^2(x/2) > \frac{2}{\pi^2} x^2$ ($0 < |x| \leq \pi$) などを組み合わせてはさみうちにする方法もあります。

いずれの方法でも **テイラー展開なし** で極限值 $1/2$ を得られます。