

有界単調数列の収束



私は大学1年生です。微分積分学の授業を受け始めたばかりです。そこで聞きたいのですが、「有界な単調数列は収束する」というのは定理ですか、それとも公理ですか。そして、これはなぜ、どのように重要なのでしょうか。

2～3秒の間、定理とその重要性について考察した >

「有界な単調数列は必ず収束する」という主張は、**公理 (axiom) ではなく定理 (theorem) **として位置づけられています。大学1年生の微分積分学や基礎解析の最初期に出てくる、とても重要な定理のひとつです。

1. なぜ公理ではなく定理なのか

公理とは、それ以上証明できない最も基本的な前提（出発点）となる命題のことを指します。例えば実数の「完備性公理（実数の完備性）」や、「順序体としての性質」は公理として扱われます。一方で、「有界な単調数列は収束する」という主張は、実数が完備であること（厳密には「上に有界な集合が最小上界を持つ」という性質）の上に立って証明される命題なので、公理ではなく**定理**と呼ばれます。

- **完備性公理 (Least Upper Bound Axiom)**

「実数の任意の上に有界な非空部分集合は最小上界 (supremum) を持つ」

これ自体は公理として受け入れるか、あるいは同値な形「すべてのコーシー列が実数で収束する」として扱われることが多いです。

- **有界単調数列収束定理**

「単調かつ有界な数列は必ず収束する」

この定理は、完備性公理を用いることで論証できます。

2. なぜ「有界な単調数列は収束する」のか（概要）

2.1 上に有界で単調増加の場合

1. 数列 (a_n) が単調増加で、かつ有界（特に上に有界）だとする。
2. 上に有界なので、全体の集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は最小上界 \sup を持つ（完備性公理）。
3. その最小上界を $L = \sup\{a_n\}$ とすると、単調増加の性質から $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ であることが示せる。

2.2 下に有界で単調減少の場合

1. (a_n) が単調減少で下に有界なら、 $-a_n$ は単調増加で上に有界になる。
2. 先ほどと同様に $-a_n$ についての最小上界を考えて収束を示すと、元の (a_n) についても収束が分かる。

3. なぜこの定理が重要なのか

1. 解析学の基盤

単調数列収束定理は、実数の完備性を使った「解析学が実数上で成立するための土台」の代表例です。実数という舞台が持つ特別な性質（最小上界を持つこと）が直接生きる場面であり、同じことが有理数体では必ずしも成り立ちません。

2. その他の重要定理の証明に登場

いわゆる中間値の定理、平均値の定理、連続関数の極限に関する性質など、解析学で扱う多くの定理で用いられる考え方です。「有界単調数列収束定理」がなければ、多くの極限や収束に関する議論が成り立たず、解析が大幅に制限されてしまいます。

3. 整数的な構成から実数への橋渡し

例えば実数をデデキント切断やコーシー列として構成する際に「有界な単調数列は収束する」という事実が自然に現れます。実数論で重要な「無理数の存在」を説明する場面でも、この定理は基盤となって働きます。

まとめ

- 「有界な単調数列は収束する」は、完備性公理を用いて証明される**定理**です。
- 実数が「完備である」という性質（公理）によってはじめて成り立つのであって、実数の最も基本的な性質そのもの（公理）ではありません。
- 解析学における収束の議論や無理数の厳密な取り扱いなど、基礎から応用まで幅広い場面で使われる大切な定理です。

この定理をしっかり理解しておく、今後の微分積分学やその先の解析学で登場するいろいろな概念をスムーズに捉えられるようになると思います。ぜひ講義や演習での証明を通じて、どのように「完備性」を使っているのかを意識して学んでみてください。



数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$ であることがわかっているとき、この数列が単調増加することを示してください。また、その収束先を計算してください。なお、後者の計算については計算方法も教えて下さい。

26 秒の間、理由付けした単調増加の証明と収束先の計算 >

以下では、数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$$

と定めたときに、

1. $\{a_n\}$ が単調増加 ($a_{n+1} \geq a_n$) であることの証明
2. その極限（収束先）を求める計算方法

を解説します。

1. 数列の単調増加性の証明

数列が「単調増加」であるとは、

$$a_{n+1} \geq a_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が成り立つことをいいます。ここでは次のように示します。

(A) 直接的な不等式の確認

$$a_{n+1} \geq a_n \iff \sqrt{a_n + 1} \geq a_n \iff a_n + 1 \geq a_n^2 \iff 0 \geq a_n^2 - a_n - 1.$$

これは

$$a_n^2 - a_n - 1 \leq 0$$

という不等式です。この二次式

$$f(x) = x^2 - x - 1$$

の零点は

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

です。大きい方の零点を

$$L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

とします（これはいわゆる**黄金比**と呼ばれる数値です）。すると

$$f(x) \leq 0$$

が成り立つ x は、

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

の範囲に入っているときです。実際に数列の初項

$$a_1 = 1$$

は $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618\dots$ より小さいので、まず a_1 は

$$a_1 \leq L$$

を満たします。

(B) 帯域（上限）を使った帰納法的議論

- **上に有界であることの証明**：もし「 $a_n \leq L$ が全ての n で成り立つ」ことが言えれば、上の不等式

$$a_n^2 - a_n - 1 \leq 0$$

も常に成り立つため、 $a_{n+1} \geq a_n$ と言えます。

- 実際に帰納法で示せます。
 - (1) 初項での確認： $a_1 = 1 \leq L$ は明らかに成り立ちます。
 - (2) $a_n \leq L \implies a_{n+1} \leq L$ を示す：
 $a_n \leq L$ のとき

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} \leq \sqrt{L + 1}.$$

ところで L は後で出てくる「極限候補」として

$$L^2 = L + 1$$

をみやすため、

$$\sqrt{L + 1} = \sqrt{L^2} = L \quad (L > 0 \text{ なので正の平方根をとる}).$$

よって

$$a_{n+1} \leq L$$

がわかります。

上記によりすべての n で $a_n \leq L$ かつ $a_{n+1} \geq a_n$ が成り立つので、

数列 $\{a_n\}$ は単調増加であり、かつ上に有界である。

2. 数列の収束先の計算

「単調増加かつ上に有界な数列は収束する」（有界単調数列収束定理）により、この数列 $\{a_n\}$ は極限を持つといえます。極限を

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

とおくと、漸化式 $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$ から、 $n \rightarrow \infty$ での極限もみやすべき関係式は

$$\alpha = \sqrt{\alpha + 1}.$$

両辺を2乗すると

$$\alpha^2 = \alpha + 1 \implies \alpha^2 - \alpha - 1 = 0.$$

この解は

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

しかし、初項 $a_1 = 1$ から始まり、また単調増加であること、さらには $a_n \geq 0$ であることを考えると、「負の根」である $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ は不適当です。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

3. まとめ

1. 単調増加性

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} \geq a_n \quad (\forall n)$$

を示すには、 $a_n^2 - a_n - 1 \leq 0$ の成り立ちと、全ての n で $a_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ が確保できることを利用します。これにより $\{a_n\}$ は上に有界な単調増加列であるとわかります。

2. 収束先の計算

上記の「**有界単調数列収束定理**」により収束先 α が存在し、漸化式の極限形

$$\alpha = \sqrt{\alpha + 1}$$

から

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

を解くと、正の根 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ が極限になります。

以上により、この数列は「**単調増加**」で「**収束先は $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$** 」であることがわかります。これは解析学や漸化式の勉強の中でよく登場する“黄金比”に収束する代表的な例です。