Mini Test 01 (解析学概論)

実施日 2025.06.10

問 1． (a) 関数 $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ に対し、一階導関数 df/dx および二階導関数 d^2f/dx^2 を計算せよ．

(b) この関数 $f(x)$ に対し、$x_0 = 2/\pi$ で接する接線の方程式を求めよ．

(c) この関数 $f(x)$ に対し、$x_0 = 2/\pi$ の周囲での Taylor 展開式を二階微分に関わる項まで具体的に求めよ．つまり、

$$f(x_0 + \Delta x) = 0\,\text{階微分項} + 1\,\text{階微分項} + 2\,\text{階微分項} + \text{剰余項}\ R_3$$

の形で計算せよ．具体的な計算は右辺の 2 階微分項まででよく、R_3 は具体的に書かなくて良い (R_3 とだけ書けばよい)．なお、$x_0 = 2/\pi$ であることを代入して可能な限り具体的に値を計算せよ．

問 2． 二つの実数 $x, y \in \mathbf{R}$ に対する関数

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

に対し、

$$\begin{cases} x &= u + v, \\ y &= u - v, \end{cases}$$

として $(u, v) = (1.5, 0.5)$ のときの $\partial f/\partial v$ を具体的に数値で求めよ．

問 3． 三つの実数 $x, y, z \in \mathbf{R}$ に対する関数

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + yz + 4x - y + 3$$

が極大になるもしくは極小になる点 (x, y, z) があるか調べよ．無い場合は無いという根拠を、ある場合はその点の座標、f の値、その点で f が極大か極小かを根拠とともに解答せよ．

問 4． 二つの実数 $x, y \in \mathbf{R}$ が制約条件 $r(x, y) = xy + 1 = 0$ を満たす状況において関数

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x - y$$

が極大になるもしくは極小になる点 (x, y) があるか、$y > 0$ の範囲で調べよ．無い場合は無いという根拠を、ある場合はその点の座標、f の値、その点で f が極大か極小かを根拠とともに解答せよ．

以上.

Mini Test 01 (解析学概論)

実施日 2025.06.10

問 1. (a) 関数 $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ に対し、一階導関数 df/dx および二階導関数 d^2f/dx^2 を計算せよ.

(b) この関数 $f(x)$ に対し、$x_0 = 2/\pi$ で接する接線の方程式を求めよ.

(c) この関数 $f(x)$ に対し、$x_0 = 2/\pi$ の周囲での Taylor 展開式を二階微分に関わる項まで具体的に求めよ．つまり、

$$f(x_0 + \Delta x) = 0\,\text{階微分項} + 1\,\text{階微分項} + 2\,\text{階微分項} + \text{剰余項}\ R_3$$

の形で計算せよ．具体的な計算は右辺の 2 階微分項まででよく、R_3 は具体的に書かなくて良い (R_3 とだけ書けばよい)．なお、$x_0 = 2/\pi$ であることを代入して可能な限り具体的に値を計算せよ.

問 2. 二つの実数 $x, y \in \mathbf{R}$ に対する関数

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

に対し、

$$\begin{cases} x &= u + v, \\ y &= u - v, \end{cases}$$

として $(u, v) = (1.5, 0.5)$ のときの $\partial f/\partial v$ を具体的に数値で求めよ.

問 3. 三つの実数 $x, y, z \in \mathbf{R}$ に対する関数

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + yz + 4x - y + 3$$

が極大になるもしくは極小になる点 (x, y, z) があるか調べよ．無い場合は無いという根拠を、ある場合はその点の座標、f の値、その点で f が極大か極小かを根拠とともに解答せよ.

問 4. 二つの実数 $x, y \in \mathbf{R}$ が制約条件 $r(x, y) = xy + 1 = 0$ を満たす状況において関数

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x - y$$

が極大になるもしくは極小になる点 (x, y) があるか、$y > 0$ の範囲で調べよ．無い場合は無いという根拠を、ある場合はその点の座標、f の値、その点で f が極大か極小かを根拠とともに解答せよ.

以上.