変数 x,y による二次多項式 F(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 -6y を，2x2の対称行列を用いた二次形式と一次項の和として表現して下さい.

20 秒の間、Thought

問題の解答

二次多項式

$$F(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 6y$$

を、2×2の対称行列を用いた二次形式と一次項の和として表現します。

ステップ 1：二次形式の行列表示

まず、二次項を行列形式で表します。

(a) 二次形式の一般形

二次形式は次のように表せます：

$$F_{\text{quadratic}}(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

展開すると：

$$F_{\text{quadratic}}(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

(b) 元の二次項との比較

与えられた二次項は：

$$x^2 + 2xy + 2y^2$$

これを係数ごとに比較します：

1. x^2 の係数：

$$a_{11} = 1$$

2. xy の係数：

$$2a_{12} = 2 \quad \Rightarrow \quad a_{12} = 1$$

3. y^2 の係数：

$$a_{22} = 2$$

(c) 対称行列 A の決定

以上より、対称行列 A は：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ステップ 2：一次項の行列表示

一次項は $-6y$ です。これをベクトルを用いて表します。

(a) 一次項の一般形

一次項は次のように表せます：

$$F_{\text{linear}}(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1 x + b_2 y$$

(b) 元の一次項との比較

与えられた一次項は $-6y$ なので：

1. x の係数：

$$b_1 = 0$$

2. y の係数：

$$b_2 = -6$$

(c) ベクトル $\mathbf{b}$ の決定

ベクトル $\mathbf{b}$ は：

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

ステップ 3：まとめ

以上より、二次多項式 $F(x, y)$ は次のように表現できます。

(a) 行列とベクトルを用いた表現

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

(b) 具体的な展開

展開して確認します：

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} \\ &= (x \cdot 1 \cdot x + x \cdot 1 \cdot y + y \cdot 1 \cdot x + y \cdot 2 \cdot y) + (0 \cdot x + (-6) \cdot y) \\ &= (x^2 + 2xy + 2y^2) - 6y \end{aligned}$$

元の二次多項式と一致します。

答え

二次多項式 $F(x, y)$ は、対称行列 A とベクトル $\mathbf{b}$ を用いて以下のように表されます。

- **対称行列 A：**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- **ベクトル $\mathbf{b}$：**

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

- **表現：**

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mathbf{b}$$

補足説明

- **二次形式**は、対称行列を用いて二次項をコンパクトに表現する方法です。
- **一次項**もベクトルを用いて表現することで、行列・ベクトルの計算に統一できます。

これにより、二次多項式 $F(x, y)$ を行列とベクトルを用いた形で表現することができました。

今示した二次形式と一次項の和による表現を通じて，二次多項式 F(x,y) の最小値を求めて下さい．また，そのときの x,y も教えて下さい．

13 秒の間、Thought

問題の解答

先ほどの二次形式と一次項の和による表現を用いて、二次多項式 $F(x, y)$ の最小値とそのときの x, y の値を求めます。

ステップ 1：二次多項式の行列表示の確認

先に得た表現は以下の通りです。

(a) 二次形式：

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mathbf{b}$$

(b) 行列 A とベクトル $\mathbf{b}$：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

ステップ 2：二次多項式の最小値を求める

二次多項式の最小値は、偏微分を用いて求めることができます。行列形式を用いると、計算が簡潔になります。

(a) 目的関数の定義

$$F(x, y) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \mathbf{b}$$

ただし、$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ です。

(b) $F(x, y)$ の勾配（グラディエント）の計算

目的関数を x と y で微分します。

勾配は次のように表されます：

$$\nabla F = 2A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

(c) 最小値を取る条件

最小値を取るためには、勾配がゼロになる点を求めます：

$$\nabla F = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad 2A\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

ステップ 3：連立方程式の解法

(a) 連立方程式の設定

行列 $2A$ とベクトル $\mathbf{b}$ を計算します。

1. **$2A$ の計算：**

$$2A = 2 \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. **連立方程式：**

$$2A\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x + 2y + 0 = 0 & (1) \\ 2x + 4y - 6 = 0 & (2) \end{cases}$$

(b) 式 (1) の整理

式 (1) を簡略化：

$$2x + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y = 0$$

(c) 式 (2) に $x = -y$ を代入

$$2(-y) + 4y - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2y + 4y - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y - 6 = 0$$

(d) y の解を求める

$$2y - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3$$

(e) x の値を求める

$x = -y$ なので：

$$x = -3$$

ステップ 4：最小値の計算

$x = -3$、$y = 3$ のときの $F(x, y)$ の値を計算します。

(a) $F(x, y)$ の計算

$$\begin{aligned} F(-3, 3) &= (-3)^2 + 2 \times (-3) \times 3 + 2 \times 3^2 - 6 \times 3 \\ &= 9 - 18 + 18 - 18 \\ &= (9 - 18 + 18 - 18) \\ &= (-9 + 18 - 18) \\ &= (-9 + 0) \\ &= -9 \end{aligned}$$

ステップ 5：結果のまとめ

- **最小値：**

$$F_{\text{min}} = -9$$

- **最小値をとる x, y の値：**

$$x = -3, \quad y = 3$$

答え

二次多項式 $F(x, y)$ の最小値は -9 であり、そのときの x と y の値は次の通りです。

- $x = -3$
- $y = 3$

補足説明

1. 行列形式を用いた最小値の求め方

- **勾配の計算：**

$$\nabla F = 2A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

- **勾配をゼロと置く：**

$$2A\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

- **解を求める：**

  連立方程式を解いて x と y の値を求めます。

2. 二次形式の最小値の性質

- 二次形式は凸関数であり、一つの最小値を持ちます。
- 行列 A が正定値または半正定値である場合、最小値は有限です。

3. 直接的な計算方法

- **偏微分を用いた方法：**

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2y = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 4y - 6 = 0 \quad (2)$$

  式 (1) より $x = -y$ を得て、式 (2) に代入して y を求めます。