x を変数としてその1次以下の多項式の集合をベクトル空間 V とします.
そして, V に属する f, g に対してその内積 (f,g) を (f,g) = ¥int_0^1 f(x)g(x) dx と定義します.

このとき, 以下の計算をして下さい.
1. V に属するベクトル 1+x の長さを求めて下さい.
2. ベクトル 1+x と直交する V の元を求めて下さい.
3. ベクトル 1+x とベクトル x-1 の間の角度を計算して下さい.

26 秒の間、Thought

はい、与えられたベクトル空間 V と内積に基づいて、以下の計算を行います。

---

1. ベクトル $1 + x$ の長さを求める

ベクトルの長さ（ノルム）は、内積の平方根で定義されます。

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}$$

したがって、まず内積 $(1 + x, 1 + x)$ を計算します。

内積の計算

$$(1 + x, 1 + x) = \int_0^1 (1 + x)(1 + x)\, dx = \int_0^1 (1 + 2x + x^2)\, dx$$

積分の計算

積分を項ごとに計算します。

1. $\int_0^1 1\, dx = [x]_0^1 = 1 - 0 = 1$
2. $\int_0^1 2x\, dx = [x^2]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1 - 0 = 1$
3. $\int_0^1 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

これらを合計すると、

$$(1 + x, 1 + x) = 1 + 1 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

ベクトルの長さ

$$\|1 + x\| = \sqrt{(1 + x, 1 + x)} = \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

必要であれば、有理化しても良いですが、このままでも結構です。

2. ベクトル $1+x$ と直交する V の元を求める

ベクトル $h(x) \in V$ が $1+x$ と直交するための条件は、内積がゼロになることです。

$$(1+x, h(x)) = 0$$

一般的な要素 $h(x)$ の表現

V の任意の要素は、1次以下の多項式なので、

$$h(x) = ax + b$$

ここで、a, b は実数の定数です。

内積の計算

$$(1+x, h(x)) = \int_0^1 (1+x)(ax+b)\,dx$$

展開すると、

$$(1+x)(ax+b) = ax(1+x) + b(1+x) = ax^2 + ax + bx + b$$

整理すると、

$$ax^2 + (a+b)x + b$$

内積の積分

$$(1+x, h(x)) = \int_0^1 \left(ax^2 + (a+b)x + b\right) dx$$

項別に積分します。

1. $\int_0^1 ax^2\,dx = a\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = a\left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{a}{3}$
2. $\int_0^1 (a+b)x\,dx = (a+b)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = (a+b)\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{a+b}{2}$
3. $\int_0^1 b\,dx = b[x]_0^1 = b(1-0) = b$

これらを合計すると、

$$(1+x, h(x)) = \frac{a}{3} + \frac{a+b}{2} + b$$

方程式を整理

内積がゼロになる条件：

$$\frac{a}{3} + \frac{a+b}{2} + b = 0$$

これを共通分母 6 を使って整理します。

1. それぞれの項を分母 6 に揃える：

$$\frac{2a}{6} + \frac{3(a+b)}{6} + \frac{6b}{6}$$

2. 分子をまとめる：

$$\frac{2a + 3a + 3b + 6b}{6} = \frac{5a + 9b}{6}$$

最終的な方程式

内積がゼロになるためには、

$$\frac{5a + 9b}{6} = 0$$

したがって、

$$5a + 9b = 0$$

解

この一次方程式を満たす a, b の組が条件を満たします。つまり、

$$a = -\frac{9}{5}b$$

したがって、$h(x)$ は次の形になります：

$$h(x) = -\frac{9}{5}b \cdot x + b = b\left(-\frac{9}{5}x + 1\right)$$

ここで、b は任意の実数です。

3. ベクトル $1+x$ と $x-1$ の間の角度を計算

ベクトル間の角度 θ は、以下の式で求められます。

$$\cos\theta = \frac{(1+x, x-1)}{\|1+x\| \cdot \|x-1\|}$$

内積 $(1+x, x-1)$ の計算

まず、内積を計算します。

$$(1+x, x-1) = \int_0^1 (1+x)(x-1)\,dx$$

展開すると、

$$(1+x)(x-1) = x - 1 + x^2 - x = x^2 - 1$$

積分の計算

$$(1+x, x-1) = \int_0^1 (x^2-1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} - 1\right) - (0-0) = -\frac{2}{3}$$

ベクトル $x-1$ の長さ $\|x-1\|$ の計算

$$\|x-1\| = \sqrt{(x-1, x-1)} = \sqrt{\int_0^1 (x-1)^2\,dx}$$

まず、$(x-1)^2$ を展開します。

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

積分の計算

$$(x-1, x-1) = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right) - (0-0+0) = \frac{1}{3}$$

したがって、

$$\|x-1\| = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

角度の計算

既に $\|1+x\| = \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ であることを求めています。

$$\cos\theta = \frac{(1+x, x-1)}{\|1+x\| \cdot \|x-1\|} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{7}}{3}}$$

分母・分子を整理

$$\cos\theta = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{7}}{3}} = -\frac{2}{3} \times \frac{3}{\sqrt{7}} = -\frac{2}{\sqrt{7}}$$

角度 θ の求め方

$$\theta = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$$

これが求める角度です。

まとめ

1. **ベクトル $1+x$ の長さ：**

$$\|1+x\| = \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

2. **ベクトル $1+x$ と直交する V の元：**

$$h(x) = b\left(-\frac{9}{5}x + 1\right), \quad b \in \mathbb{R}$$

3. **ベクトル $1+x$ と $x-1$ の間の角度：**

$$\theta = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$$

x を変数としてその2次以下の多項式の集合をベクトル空間 V とします．
そして，V に属する f, g に対してその内積 (f,g) を (f,g) = ¥int_0^1 f(x)g(x) dx と定義します．

このとき，V に属するベクトル f = 1+x+x^2, g = 1-x+(1/2)x^2 に対し，以下を行って下さい．
1. f, g に対してシュバルツの不等式が成り立つことを実際に計算で確認して下さい．
2. f, g に対して三角不等式が成り立つことを実際に計算で確認して下さい．

5 秒の間、Thought

はい、与えられた多項式 f と g に対して、シュワルツの不等式と三角不等式が成り立つことを実際に計算で確認します。

前提

- ベクトル空間 V：x を変数とする2次以下の多項式全体の集合。
- 内積の定義：

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

- ベクトル：

$$f(x) = 1 + x + x^2$$

$$g(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2$$

---

1. シュワルツの不等式の確認

シュワルツの不等式（コーシー・シュワルツの不等式）：

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

ここで、ベクトルのノルム（長さ）は以下で定義されます：

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}$$

$$\|g\| = \sqrt{(g, g)}$$

ステップ1：内積 (f, g) の計算

まず、$f(x)g(x)$ を計算します。

(a) $f(x)g(x)$ の展開

$$f(x)g(x) = (1 + x + x^2)\left(1 - x + \frac{1}{2}x^2\right)$$

展開します：

1. $1 \times 1 = 1$
2. $1 \times (-x) = -x$
3. $1 \times \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^2$
4. $x \times 1 = x$
5. $x \times (-x) = -x^2$
6. $x \times \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^3$
7. $x^2 \times 1 = x^2$
8. $x^2 \times (-x) = -x^3$
9. $x^2 \times \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^4$

これらを合計すると：

$$
\begin{aligned}
f(x)g(x) &= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 + x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^4 \\
&= 1 + (-x + x) + \left(\frac{1}{2}x^2 - x^2 + x^2\right) + \left(\frac{1}{2}x^3 - x^3\right) + \frac{1}{2}x^4 \\
&= 1 + 0 + \left(\frac{1}{2}x^2 - x^2 + x^2\right) + \left(\frac{1}{2}x^3 - x^3\right) + \frac{1}{2}x^4 \\
&= 1 + 0 + \left(\frac{1}{2}x^2\right) + \left(-\frac{1}{2}x^3\right) + \frac{1}{2}x^4 \\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4
\end{aligned}
$$

(b) (f, g) の積分計算

$$
(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4\right) dx
$$

各項を積分します：

1. $\int_0^1 1\,dx = [x]_0^1 = 1 - 0 = 1$
2. $\int_0^1 \frac{1}{2}x^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{6}$
3. $\int_0^1 -\frac{1}{2}x^3\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - 0\right) = -\frac{1}{8}$
4. $\int_0^1 \frac{1}{2}x^4\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - 0\right) = \frac{1}{10}$

これらを合計すると：

$$
(f, g) = 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10}
$$

分数の通分をします。分母の最小公倍数は 120 です。

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{120}{120} \\
\frac{1}{6} &= \frac{20}{120} \\
-\frac{1}{8} &= -\frac{15}{120} \\
\frac{1}{10} &= \frac{12}{120}
\end{aligned}
$$

合計：

$$(f, g) = \frac{120}{120} + \frac{20}{120} - \frac{15}{120} + \frac{12}{120} = \frac{(120 + 20 - 15 + 12)}{120} = \frac{137}{120}$$

したがって、

$$(f, g) = \frac{137}{120}$$

ステップ2：ノルム $\|f\|$ と $\|g\|$ の計算

(a) $\|f\|$ の計算

まず、$f(x)^2$ を計算します。

$$f(x)^2 = (1 + x + x^2)^2 = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + x^4$$

展開：

1. $(1)^2 = 1$
2. $2 \times 1 \times x = 2x$
3. $2 \times 1 \times x^2 = 2x^2$
4. $2 \times x \times x^2 = 2x^3$
5. $(x^2)^2 = x^4$

したがって、

$$f(x)^2 = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + x^4$$

積分：

$$(f, f) = \int_0^1 f(x)^2 \, dx = \int_0^1 \left(1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + x^4\right) dx$$

各項を積分：

1. $\int_0^1 1 \, dx = 1$
2. $\int_0^1 2x \, dx = [x^2]_0^1 = 1$
3. $\int_0^1 2x^2 \, dx = 2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
4. $\int_0^1 2x^3 \, dx = 2 \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
5. $\int_0^1 x^4 \, dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$

合計：

$$(f, f) = 1 + 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$$

分母の最小公倍数は 30 です。

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{30}{30} \\ 1 &= \frac{30}{30} \\ \frac{2}{3} &= \frac{20}{30} \\ \frac{1}{2} &= \frac{15}{30} \\ \frac{1}{5} &= \frac{6}{30} \end{aligned}$$

合計：

$$(f,f) = \frac{30}{30} + \frac{30}{30} + \frac{20}{30} + \frac{15}{30} + \frac{6}{30} = \frac{(30+30+20+15+6)}{30} = \frac{101}{30}$$

したがって、

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\frac{101}{30}}$$

(b) $\|g\|$ の計算

$g(x)^2$ を計算します。

$$g(x)^2 = \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2\right)^2$$

展開：

1. $(1)^2 = 1$
2. $2 \times 1 \times (-x) = -2x$
3. $2 \times 1 \times \frac{1}{2}x^2 = x^2$
4. $(-x)^2 = x^2$
5. $2 \times (-x) \times \frac{1}{2}x^2 = -x^3$
6. $\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 = \frac{1}{4}x^4$

したがって、

$$g(x)^2 = 1 - 2x + x^2 + x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4 = 1 - 2x + 2x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4$$

積分：

$$(g,g) = \int_0^1 g(x)^2\,dx = \int_0^1 \left(1 - 2x + 2x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4\right) dx$$

各項を積分：

1. $\int_0^1 1\,dx = 1$
2. $\int_0^1 -2x\,dx = -2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -2 \times \frac{1}{2} = -1$
3. $\int_0^1 2x^2\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
4. $\int_0^1 -x^3\,dx = -\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}$
5. $\int_0^1 \frac{1}{4}x^4\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$

合計：

$$(g,g) = 1 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$$

分母の最小公倍数は 60 です。

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{60}{60} \\
-1 &= -\frac{60}{60} \\
\frac{2}{3} &= \frac{40}{60} \\
-\frac{1}{4} &= -\frac{15}{60} \\
\frac{1}{20} &= \frac{3}{60}
\end{aligned}
$$

合計：

$$(g,g) = \frac{60}{60} - \frac{60}{60} + \frac{40}{60} - \frac{15}{60} + \frac{3}{60} = \frac{(60 - 60 + 40 - 15 + 3)}{60} = \frac{28}{60}$$

簡約すると：

$$(g,g) = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

したがって、

$$\|g\| = \sqrt{(g,g)} = \sqrt{\frac{7}{15}}$$

ステップ3：シュワルツの不等式の確認

不等式：

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

計算した値を代入します。

左辺：

$$|(f, g)| = \left|\frac{137}{120}\right| = \frac{137}{120}$$

右辺：

$$\|f\| \cdot \|g\| = \sqrt{\frac{101}{30}} \cdot \sqrt{\frac{7}{15}} = \sqrt{\frac{101}{30} \times \frac{7}{15}} = \sqrt{\frac{101 \times 7}{30 \times 15}} = \sqrt{\frac{707}{450}}$$

計算：

$$\sqrt{\frac{707}{450}} = \frac{\sqrt{707}}{\sqrt{450}}$$

分母と分子を計算します。

- $\sqrt{707} \approx 26.595$
- $\sqrt{450} \approx 21.213$

したがって、

$$\|f\| \cdot \|g\| \approx \frac{26.595}{21.213} \approx 1.254$$

一方、

$$|(f, g)| = \frac{137}{120} \approx 1.1417$$

比較：

$$|(f, g)| \approx 1.1417 \leq \|f\| \cdot \|g\| \approx 1.254$$

したがって、シュワルツの不等式が成り立っています。

2. 三角不等式の確認

三角不等式：

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

ステップ1：$f+g$ のノルム $\|f+g\|$ の計算

まず、$f(x)+g(x)$ を求めます。

$$f(x)+g(x) = (1+x+x^2) + \left(1-x+\frac{1}{2}x^2\right) = 2 + (x-x) + \left(x^2+\frac{1}{2}x^2\right)$$

計算：

$$f(x)+g(x) = 2 + 0 + \frac{3}{2}x^2 = 2 + \frac{3}{2}x^2$$

(a) $(f+g)^2$ の計算

$$(f+g)(x)^2 = \left(2+\frac{3}{2}x^2\right)^2$$

展開します。

1. $(2)^2 = 4$
2. $2 \times 2 \times \frac{3}{2}x^2 = 2 \times \frac{3}{2}x^2 = 3x^2$
3. $\left(\frac{3}{2}x^2\right)^2 = \frac{9}{4}x^4$

したがって、

$$(f+g)(x)^2 = 4 + 3x^2 + \frac{9}{4}x^4$$

(b) ノルム $\|f+g\|$ の計算

積分：

$$\|f+g\|^2 = \int_0^1 \left(4 + 3x^2 + \frac{9}{4}x^4\right) dx$$

各項を積分：

1. $\int_0^1 4\,dx = 4[x]_0^1 = 4(1-0) = 4$
2. $\int_0^1 3x^2\,dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 3 \times \frac{1}{3} = 1$
3. $\int_0^1 \frac{9}{4}x^4\,dx = \frac{9}{4}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{9}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$

合計：

$$\|f+g\|^2 = 4 + 1 + \frac{9}{20} = 5 + \frac{9}{20}$$

分母を統一すると：

$$5 = \frac{100}{20}$$

合計：

$$\|f+g\|^2 = \frac{100}{20} + \frac{9}{20} = \frac{109}{20}$$

したがって、

$$\|f+g\| = \sqrt{\frac{109}{20}} = \frac{\sqrt{109}}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{109}}{2\sqrt{5}}$$

数値計算：

- $\sqrt{109} \approx 10.4403$
- $2\sqrt{5} \approx 4.4721$

したがって、

$$\|f+g\| \approx \frac{10.4403}{4.4721} \approx 2.3344$$

ステップ2：$\|f\| + \|g\|$ の計算

既に計算した $\|f\|$ と $\|g\|$ を使用します。

- $\|f\| = \sqrt{\frac{101}{30}} \approx \sqrt{3.3667} \approx 1.8340$
- $\|g\| = \sqrt{\frac{7}{15}} \approx \sqrt{0.4667} \approx 0.6831$

合計：

$$\|f\| + \|g\| \approx 1.8340 + 0.6831 = 2.5171$$

ステップ3：三角不等式の確認

不等式：

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

計算した値を比較：

- 左辺：$\|f+g\| \approx 2.3344$
- 右辺：$\|f\| + \|g\| \approx 2.5171$

確認：

$$2.3344 \leq 2.5171$$

したがって、三角不等式が成り立っています。

まとめ

1. **シュワルツの不等式**：

$$|(f, g)| = \frac{137}{120} \approx 1.1417 \leq \|f\| \cdot \|g\| \approx 1.254$$

よって、シュワルツの不等式が成り立つことを確認しました。

2. **三角不等式**：

$$\|f + g\| \approx 2.3344 \leq \|f\| + \|g\| \approx 2.5171$$

よって、三角不等式が成り立つことを確認しました。

以上の計算から、与えられたベクトル f と g に対して、シュワルツの不等式と三角不等式が成り立つことが示されました。