

3x3行列 A が

(5 6 0)

(-1 0 0)

(1 2 2)

であるとき、これを対角化してください。



54 秒の間、Thought ▾

問題の概要：

与えられた3×3行列 A を対角化します。

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

解答：

ステップ1：固有値の計算

行列 A の固有値を求めるために、特性方程式 $\det(A - \lambda I) = 0$ を解きます。

(1) $A - \lambda I$ の計算

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 6 & 0 \\ -1 & 0 - \lambda & 0 \\ 1 & 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

(2) 行列式の計算

特性方程式は次のようになります。

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

行列式を計算します。

$$\det(A - \lambda I) = (5 - \lambda) \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 0 \\ 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} - 6(-1 \cdot (2 - \lambda) - 0 \cdot 1) + 0 \cdot (-1 \cdot 2 - (0 - \lambda) \cdot 1)$$

最後の項は0になるので無視します。

副行列の行列式を計算します：

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 0 \\ 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (0 - \lambda)(2 - \lambda) - 0 \cdot 2 = (-\lambda)(2 - \lambda)$$

展開すると：

$$-\lambda(2 - \lambda) = -2\lambda + \lambda^2$$

したがって、

$$\det(A - \lambda I) = (5 - \lambda)(-2\lambda + \lambda^2) - 6(-1)(2 - \lambda)$$

(3) 式を整理します

まず、 $(5 - \lambda)(-2\lambda + \lambda^2)$ を展開します。

$$(5 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = 5(\lambda^2 - 2\lambda) - \lambda(\lambda^2 - 2\lambda) = 5\lambda^2 - 10\lambda - \lambda^3 + 2\lambda^2$$

整理すると：

$$(-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 10\lambda)$$

次に、 $-6(-1)(2 - \lambda) = -6(-1)(2 - \lambda) = 6(2 - \lambda) = 12 - 6\lambda$

これらを合わせて：

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 10\lambda) + (12 - 6\lambda)$$

さらに整理すると：

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = 0$$

両辺に -1 を掛けて：

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$$

(4) 特性方程式の解法

この3次方程式を解きます。

因数分解を試みます。 まず、有理数解の定理より、定数項の約数を試します。

定数項： -12

約数： $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

これらを代入して零になるものを探します。

- $\lambda = 1$ ：

$$1 - 7 + 16 - 12 = -2 \quad (\neq 0)$$

- $\lambda = 2$ ：

$$8 - 28 + 32 - 12 = 0 \quad (\lambda = 2 \text{ は解})$$

したがって、 $(\lambda - 2)$ で因数分解できます。

(5) 因数分解

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$

さらに、 $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ は因数分解できます。

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

したがって、特性方程式は：

$$(\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0$$

(6) 固有値の決定

固有値は：

- $\lambda_1 = 2$ （重解、代数的重複度2）
- $\lambda_2 = 3$

ステップ2：各固有値に対応する固有ベクトルの計算

固有値 $\lambda = 2$ の場合

(1) $A - 2I$ の計算

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 連立方程式の設定

$$(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

行列を係数行列として連立方程式を立てます。

(3) 連立方程式

- $3x_1 + 6x_2 = 0 \dots (a)$
- $-x_1 - 2x_2 = 0 \dots (b)$
- $x_1 + 2x_2 = 0 \dots (c)$

(4) 方程式を解く

方程式 (b) を整理して $x_1 = -2x_2$

これを (a) に代入：

$$3(-2x_2) + 6x_2 = -6x_2 + 6x_2 = 0$$

恒等式が得られます。

したがって、 x_2 は任意の値を取れます。

(5) 固有ベクトルの一般形

- $x_1 = -2x_2$
- x_3 は任意

よって、固有ベクトルは：

$$\mathbf{x} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(6) 基底の選択

固有値 $\lambda = 2$ に対する固有空間は2次元。基底を2つ選びます。

- $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

固有値 $\lambda = 3$ の場合

(1) $A - 3I$ の計算

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) 連立方程式の設定

$$(A - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

(3) 連立方程式

- $2x_1 + 6x_2 = 0 \dots$ (d)
- $-x_1 - 3x_2 = 0 \dots$ (e)
- $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \dots$ (f)

(4) 方程式を解く

方程式 (e) から $x_1 = -3x_2$

これを (d) に代入：

$$2(-3x_2) + 6x_2 = -6x_2 + 6x_2 = 0$$

恒等式が得られます。

次に、(f) に $x_1 = -3x_2$ を代入：

$$-3x_2 + 2x_2 - x_3 = 0 \implies -x_2 - x_3 = 0 \implies x_3 = -x_2$$

(5) 固有ベクトルの一般形

- $x_1 = -3x_2$
- $x_3 = -x_2$

よって、固有ベクトルは：

$$\mathbf{x} = x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(6) 基底の選択

固有値 $\lambda = 3$ に対する固有空間は1次元。

- $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

ステップ3：行列の対角化

(1) 固有ベクトルを列に持つ行列 P を作成

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) 対角行列 D の作成

固有値を対角成分に持つ行列 D を作成します。

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(3) 対角化の確認

行列 A は次のように対角化されます。

$$A = PDP^{-1}$$

ステップ4： P^{-1} の計算（必要であれば）

実際の計算では P^{-1} を求める必要がありますが、対角化が可能であることを示すためにここでは割愛します。

最終的な答え

行列 A は以下のように対角化されます。

$$A = PDP^{-1}$$

ここで、

- $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
 - $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
-

まとめ

- 固有値は $\lambda = 2$ （重複度2）と $\lambda = 3$ である。
- $\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは2つあり、固有空間は2次元。
- $\lambda = 3$ に対する固有ベクトルは1つで、固有空間は1次元。
- 固有ベクトルを列に持つ行列 P と対角行列 D を用いて、 A を対角化できる。

2x2 行列 A を

$\begin{pmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$

とします。このとき、行列の対角化を用いて $\exp(A)$ を求めて下さい。



27 秒の間、Thought ▾

問題の概要：

与えられた2x2行列 A を対角化し、それを用いて行列指数関数 $\exp(A)$ を求めます。

行列 A は以下の通りです。

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$$

解答：

ステップ1：行列 A の固有値と固有ベクトルを求める

まず、行列 A を対角化するために固有値と固有ベクトルを求めます。

1. 固有値の計算

(a) 特性方程式の設定

固有値 λ は次の特性方程式の解です。

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

ここで、 I は2x2の単位行列です。

(b) $A - \lambda I$ の計算

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 13 - \lambda & -30 \\ 5 & -12 - \lambda \end{pmatrix}$$

(c) 行列式の計算

$$\det(A - \lambda I) = (13 - \lambda)(-12 - \lambda) - (-30)(5)$$

展開します。

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (13 - \lambda)(-12 - \lambda) + 150 \\ &= [13 \times (-12 - \lambda) - \lambda \times (-12 - \lambda)] + 150 \\ &= [-156 - 13\lambda + 12\lambda + \lambda^2] + 150 \\ &= [-156 - \lambda + \lambda^2] + 150 \\ &= (\lambda^2 - \lambda - 6) \end{aligned}$$

したがって、特性方程式は：

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

(d) 特性方程式の解

二次方程式を解きます。

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

- $\lambda_1 = \frac{1+5}{2} = 3$
- $\lambda_2 = \frac{1-5}{2} = -2$

固有値は $\lambda = 3$ と $\lambda = -2$ です。

2. 固有ベクトルの計算

(a) 固有値 $\lambda = 3$ に対応する固有ベクトル

(i) 連立方程式の設定

$$(A - 3I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$A - 3I$ を計算します。

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 10 & -30 \\ 5 & -15 \end{pmatrix}$$

(ii) 方程式を立てる

$$\begin{cases} 10v_1 - 30v_2 = 0 \\ 5v_1 - 15v_2 = 0 \end{cases}$$

(iii) 方程式を簡略化

両方の方程式は同じ比率なので、1つの独立な方程式があります。

方程式を簡単にとすると：

$$v_1 - 3v_2 = 0 \implies v_1 = 3v_2$$

(iv) 固有ベクトルの一般形

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって、固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ のスカラー倍です。

(b) 固有値 $\lambda = -2$ に対応する固有ベクトル

(i) 連立方程式の設定

$$(A + 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$A + 2I$ を計算します。

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 15 & -30 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}$$

(ii) 方程式を立てる

$$\begin{cases} 15v_1 - 30v_2 = 0 \\ 5v_1 - 10v_2 = 0 \end{cases}$$

(iii) 方程式を簡略化

同様に、方程式を簡単にすると：

$$v_1 - 2v_2 = 0 \implies v_1 = 2v_2$$

(iv) 固有ベクトルの一般形

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって、固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ のスカラー倍です。

ステップ2：行列 A の対角化

(1) 行列 P の構成

固有ベクトルを列ベクトルとして持つ行列 P を作ります。

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 対角行列 D の構成

固有値を対角要素に持つ対角行列 D を作ります。

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(3) P の逆行列 P^{-1} の計算

P の行列式を計算します。

$$\det(P) = (3)(1) - (2)(1) = 3 - 2 = 1$$

よって、 P は逆行列を持ちます。

P^{-1} の計算

逆行列 P^{-1} は次のように求められます。

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} P_{22} & -P_{12} \\ -P_{21} & P_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ステップ3：行列指数関数 $\exp(A)$ の計算

(1) 対角行列の指数関数

対角行列 D の指数関数は、対角要素に指数関数を適用したものです。

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix}$$

(2) 行列指数関数の計算

行列 A の指数関数は次のように計算できます。

$$\exp(A) = P \exp(D) P^{-1}$$

具体的に計算します。

(i) $P \exp(D)$ の計算

$$P \exp(D) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^3 & 2e^{-2} \\ e^3 & e^{-2} \end{pmatrix}$$

(ii) $\exp(A) = P \exp(D) P^{-1}$ の計算

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 3e^3 & 2e^{-2} \\ e^3 & e^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(iii) 積の計算

計算を行います。

- 1行目：

- 第1列：

$$(3e^3)(1) + (2e^{-2})(-1) = 3e^3 - 2e^{-2}$$

- 第2列：

$$(3e^3)(-2) + (2e^{-2})(3) = -6e^3 + 6e^{-2}$$

- 2行目：

- 第1列：

$$(e^3)(1) + (e^{-2})(-1) = e^3 - e^{-2}$$

- 第2列：

$$(e^3)(-2) + (e^{-2})(3) = -2e^3 + 3e^{-2}$$

(iv) 結果の行列

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 3e^3 - 2e^{-2} & -6e^3 + 6e^{-2} \\ e^3 - e^{-2} & -2e^3 + 3e^{-2} \end{pmatrix}$$

答え：

行列 A の指数関数 $\exp(A)$ は次のようになります。

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 3e^3 - 2e^{-2} & -6e^3 + 6e^{-2} \\ e^3 - e^{-2} & -2e^3 + 3e^{-2} \end{pmatrix}$$

まとめ：

- **固有値と固有ベクトル**を求めて、行列 A を対角化しました。
- 対角化した行列を用いて、**行列指数関数 $\exp(A)$** を計算しました。
- 計算手順は以下の通りです。
 1. **固有値の計算**：特性方程式を解くことで固有値を求めました。
 2. **固有ベクトルの計算**：各固有値に対応する固有ベクトルを求めました。
 3. **行列の対角化**：固有ベクトルを用いて行列 A を対角化しました。
 4. **指数関数の計算**：対角行列の指数関数を計算し、それを用いて $\exp(A)$ を求めました。