

直交ベクトルの計算



← 向1のスキャン画像を upload した。

画像をアップロードしました



以下のようにすると計算が比較的すっきりします。まず

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

に対して、最初の正規化ベクトルを

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定義します。

次に、 u_2 から v_1 成分を除いてできる直交方向を

$$w_2 = u_2 - (u_2 \cdot v_1) v_1$$

で求め、それを正規化して

$$v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$$

とします。実際に計算すると、スカラー倍をうまくまとめれば

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

という簡単な形で与えられます。

最後に、 u_3 から v_1, v_2 成分を除いてできる直交方向を

$$w_3 = u_3 - (u_3 \cdot v_1) v_1 - (u_3 \cdot v_2) v_2$$

で求め、正規化すると

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

が得られます。

以上により、求める互いに直交し、かつ長さ 1 のベクトルの一組としては

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を挙げることができます。



向2

 画像をアップロードしました



Gram-Schmidt 法の手順に従って順を追って計算すると次のようになります。まず

$$f_1(x) = 1$$

のノルムを求めると

$$\|f_1\|^2 = (f_1, f_1) = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot 1 \, dx = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2},$$

したがって

$$\|f_1\| = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad v_1(x) = \frac{f_1(x)}{\|f_1\|} = \sqrt{2}.$$

次に

$$f_2(x) = 1 + x$$

を v_1 に直交化するために

$$w_2(x) = f_2(x) - (f_2, v_1) v_1(x)$$

を計算します。まず

$$(f_2, v_1) = \int_0^1 x(1+x) \sqrt{2} \, dx = \sqrt{2} \int_0^1 x(1+x) \, dx = \sqrt{2} \int_0^1 (x+x^2) \, dx = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{5\sqrt{2}}{6},$$

となるので

$$w_2(x) = (1+x) - \frac{5\sqrt{2}}{6} \sqrt{2} = (1+x) - \frac{5}{3} = x - \frac{2}{3}.$$

この w_2 のノルムは

$$\|w_2\|^2 = \int_0^1 x \left(x - \frac{2}{3} \right)^2 \, dx = \frac{1}{36},$$

したがって $\|w_2\| = 1/6$ となります。よって

$$v_2(x) = \frac{w_2(x)}{\|w_2\|} = \frac{x - \frac{2}{3}}{\frac{1}{6}} = 6x - 4$$

が v_1 と直交し、かつノルム 1 をもつ 2 つ目のベクトルです。

以上より、求める 2 つの互いに直交しノルム 1 のベクトル (関数) は

$$v_1(x) = \sqrt{2}, \quad v_2(x) = 6x - 4$$

となります。



 画像をアップロードしました



以下のように「固有ベクトルを2本と、それに付随する一般化固有ベクトルを1本」見つければ、その3つを列に並べた行列 P によって $P^{-1}AP$ が上三角形になることが分かります。ポイントは、この行列 A の固有値はすべて 6 で、しかも固有空間が2次元しかない (したがって対角化はできない) ということです。

Step 1. まず

$$A - 6I = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

を見れば、ランクが 1 であることから (固有値 6 に対する) 固有空間は2次元であるとわかります。そこで、例えば

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の2つはともに $(A - 6I)e_1 = 0, (A - 6I)e_3 = 0$ をみたすので、いずれも固有ベクトルです。

Step 2. ところが固有ベクトルは2本しか取れませんか、3次元の基底をつくるにはもう1本、一般化固有ベクトルを探す必要があります。

一般化固有ベクトル e_2 とは、 $(A - 6I)e_2$ が固有ベクトル (の一次結合) になるようなベクトルのことです。たとえば

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると、実際に計算して

$$(A - 6I)e_2 = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1$$

となり、確かに $(A - 6I)e_2 = e_1$ が成立します。

Step 3. 以上で

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は互いに一次独立な3ベクトルになりました。これらを並べた

$$P = [e_1 \ e_2 \ e_3] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を考えると、

$$P^{-1}AP$$

の各列は

$$P^{-1}Ae_1, \quad P^{-1}Ae_2, \quad P^{-1}Ae_3$$

の“新しい基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ による座標”を並べたものになります。上の計算から

- $Ae_1 = 6e_1$
- $Ae_2 = e_1 + 6e_2$
- $Ae_3 = 6e_3$

が分かっていますから、これを行列で書き下せば

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

となり、確かに上三角行列になっています。これが求める P とそのときの $P^{-1}AP$ です。すなわち、

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

このように、固有値 6 の固有ベクトルが2次元あり、かつ「長さ2のジョルダン鎖」を1本持つという構造が、結果として対角成分がすべて 6 の上三角行列（ジョルダン形）を与えているわけです。



行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ を直交行列により対角化せよ。つまり、適切な直交行列 P を用意し、 $P^T A P$ が対角行列になるようにせよ。なお、解答としてはそのときの P と $A P$ を答として解答せよ。

← 問4.



解のポイントは、行列

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

がブロック対角な形をしていることです。左上 2×2 ブロック

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

の固有値は

$$\det\left(\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \lambda I\right) = (5 - \lambda)^2 - 1 = 0 \implies \lambda = 6, 4$$

であり、また右下の 1×1 ブロックは 4 なので、 A の固有値は

$$6, \quad 4, \quad 4$$

となります。以下、各固有値に対応する正規直交固有ベクトル（長さ1の固有ベクトル）を求めれば、それらを列に並べた直交行列 P が A を対角化します。

1. 左上ブロックの固有ベクトル

- 固有値 $\lambda = 6$ のときは、

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies x = y$$

となるので、一つの固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとれる。これを正規化すると $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。

- 固有値 $\lambda = 4$ のときは、

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies x = -y$$

となるので、一つの固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ をとれる。これを正規化すると $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ となる。

2. 右下ブロックに対応する固有ベクトル

右下要素 4 はそれ自体が固有値 4 を与え、その固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり、もともと長さ1なので正規化の必要はない。

3. 直交行列 P と対角化

以上より、3本の正規直交固有ベクトル

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を列ベクトルとして並べた行列

$$P = [v_1 \ v_2 \ v_3] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は直交行列（列同士が互いに直交し、かつ各列の長さが1）になっており、

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

が成り立ちます。すなわち、 A はこの P によって対角化されるわけです。

4. AP の形

なお、

$$AP = A \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A v_1 & A v_2 & A v_3 \end{pmatrix}$$

ですが、それぞれ

$$A v_1 = 6 v_1, \quad A v_2 = 4 v_2, \quad A v_3 = 4 v_3$$

とわかっているのです。結局

$$AP = \begin{pmatrix} 6 v_1 & 4 v_2 & 4 v_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となります。成分を具体的に書くと

$$AP = \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{6}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

まとめ

よって求める直交行列 P と $P^T AP$ は

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^T AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

また,

$$AP = \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{6}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となります。



問 4 の行列 A に対し, $x \in \mathbb{R}^3$ として関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^T A x - 2x^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1$$

と定義する。

この関数 $f(x)$ に有限な最大値か最小値が存在するか調べよ。存在しないならば存在しないということとその根拠を、存在するならば、「最大値か最小値か」「そのときの x の値」「そのときの $f(x)$ の値」を解答として答えよ。

← 問 5.

今解いてもらった問題を問 4 と呼び、添付画像の問題を解いてください。



以下のように考えると簡潔に答えが得られます。まず

$$f(x) = x^T A x - 2x^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \quad \text{で,} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

行列 A の固有値はいずれも正（先の問題から 4, 4, 6 など）なので, A は正定値です。すると二次形式 $x^T A x$ は下に凸（正規方程式のいう“上に開いた放物面”）となり, $f(x)$ は**最大値をもたない** ($\|x\| \rightarrow \infty$ で無限大に発散する) 一方, ただ 1 点で**有界な最小値**をもちます。

1. 最小値を与える x の求め方

$f(x)$ の勾配（微分）が 0 となる条件

$$\nabla f(x) = 2Ax - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \iff Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を解けば極値候補が求まります。上の連立方程式

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を順に解くと、まず第3行から $4x_3 = -1 \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{4}$ 。第1, 第2行は

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + 5x_2 = 2, \end{cases}$$

であり、これを解くと $x_1 = \frac{1}{8}$, $x_2 = \frac{3}{8}$ が得られます。よって

$$x_{\min} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

が唯一の極値点（実際は最小点）になります。

2. そのときの $f(x)$ の値

この $x_{\min}$ を f に代入する方法もありますが、

「 $x_{\min}$ は $Ax_{\min} = b$ をみたす」ことから、最小点での値は

$$f(x_{\min}) = (x_{\min})^T Ax_{\min} - 2(x_{\min})^T b + 1 = (x_{\min})^T b - 2(x_{\min})^T b + 1 = -(x_{\min})^T b + 1$$

のように整理できます。実際に

$$x_{\min}^T b = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} + \frac{3 \times 2}{8} + \left(-\frac{1}{4}\right) \times (-1) = \frac{1}{8} + \frac{6}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1+6+2}{8} = \frac{9}{8},$$

となるので、最小値は

$$f(x_{\min}) = -\frac{9}{8} + 1 = -\frac{1}{8}.$$

3. 結論

- $f(x)$ に有限の最大値は存在しない ($\|x\| \rightarrow \infty$ で $f(x) \rightarrow +\infty$)。

- 唯一の最小値が存在し，そのときの

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad f(x_{\min}) = -\frac{1}{8}.$$