

線形作用素の行列



V を変数 x の2次以下多項式の集合, W を変数 x の1次以下多項式の集合とします.

V から W への線形作用素 T が V の元 $f(x)$ に対して

$$T(f) = f(1) + f'(x) + 2f''(x) \cdot x$$

であります.

V, W に対する基底をそれぞれ $\{1, x, x^2/2\}, \{1, x\}$ とするとき, T の表現行列を求めてください.



解答の流れ

1. 空間と基底の確認

- V は変数 x の2次以下多項式の集合であり、基底として $\{1, x, \frac{x^2}{2}\}$ が与えられています。よって $\dim(V) = 3$ 。
- W は変数 x の1次以下多項式の集合であり、基底として $\{1, x\}$ が与えられています。よって $\dim(W) = 2$ 。

2. 線形作用素 $T: V \rightarrow W$ の定義 作用素 T は、任意の $f(x) \in V$ に対し

$$T(f)(x) = f(1) + f'(x) + 2f''(x) \cdot x$$

と定義されています。

ここで、 $\deg(f) \leq 2$ のとき、 $f''(x)$ は定数となり、また $f'(x)$ は高々1次、 $f(1)$ は定数ですから、 $T(f)(x)$ は確かに1次以下の多項式であり、 W の元となります。

3. 基底ベクトルへの作用 V の基底 $\{1, x, \frac{x^2}{2}\}$ をそれぞれ $v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = \frac{x^2}{2}$ とします。各基底ベクトルに対する T の像を計算し、 W の基底 $\{1, x\}$ による表現を求めます。

(1) $f(x) = 1$ の場合

$$f(1) = 1, \quad f'(x) = 0, \quad f''(x) = 0.$$

よって

$$T(1)(x) = 1 + 0 + 2 \cdot 0 \cdot x = 1.$$

したがって、 $T(1)(x) = 1$ は基底 $\{1, x\}$ に関して $(1, 0)$ と表せます。

(2) $f(x) = x$ の場合

$$f(1) = 1, \quad f'(x) = 1, \quad f''(x) = 0.$$

よって

$$T(x)(x) = 1 + 1 + 2 \cdot 0 \cdot x = 2.$$

よって、 $T(x)(x) = 2$ は $(2, 0)$ と表せます。

(3) $f(x) = \frac{x^2}{2}$ の場合

$$f'(x) = x, \quad f''(x) = 1, \quad f(1) = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

よって

$$T\left(\frac{x^2}{2}\right)(x) = f(1) + f'(x) + 2f''(x)x = \frac{1}{2} + x + 2 \cdot 1 \cdot x = \frac{1}{2} + 3x.$$

よって、 $T(x^2/2)(x) = \frac{1}{2} + 3x$ は $(\frac{1}{2}, 3)$ と表せます。

4. 行列表示 以上より、 T の基底変換行列 (列ベクトルはそれぞれ $T(v_1), T(v_2), T(v_3)$ の表現座標) は

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

最終答え

$$[T]_{\{1, x, x^2/2\} \rightarrow \{1, x\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

固有値と固有ベクトル



行列 A を
 $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -4 & 17 & 4 \\ -8 & 10 & 11 \end{pmatrix}$

としたとき、この A の固有値、固有ベクトルの対をすべて求めてください。



解答の流れ

1. 固有値の求め方

固有値 λ は次の固有方程式 $\det(A - \lambda I) = 0$ より求めます。

行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -4 & 17 & 4 \\ -8 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

よって $A - \lambda I$ は

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 2 & -2 \\ -4 & 17 - \lambda & 4 \\ -8 & 10 & 11 - \lambda \end{pmatrix}.$$

この行列の行列式を求めます。

2. 固有方程式の計算

$\det(A - \lambda I)$ を展開します。

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 & -2 \\ -4 & 17 - \lambda & 4 \\ -8 & 10 & 11 - \lambda \end{vmatrix}.$$

1行目で展開します。

$$= (5 - \lambda) \begin{vmatrix} 17 - \lambda & 4 \\ 10 & 11 - \lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -8 & 11 - \lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -4 & 17 - \lambda \\ -8 & 10 \end{vmatrix}.$$

小行列式を計算します。

1つ目：

$$\begin{vmatrix} 17 - \lambda & 4 \\ 10 & 11 - \lambda \end{vmatrix} = (17 - \lambda)(11 - \lambda) - 40 = (\lambda^2 - 28\lambda + 187) - 40 = \lambda^2 - 28\lambda + 147.$$

2つ目：

$$\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -8 & 11 - \lambda \end{vmatrix} = (-4)(11 - \lambda) - 4(-8) = -44 + 4\lambda + 32 = 4\lambda - 12.$$

3つ目：

$$\begin{vmatrix} -4 & 17 - \lambda \\ -8 & 10 \end{vmatrix} = (-4)(10) - (17 - \lambda)(-8) = -40 + 136 - 8\lambda = 96 - 8\lambda.$$

よって

$$\det(A - \lambda I) = (5 - \lambda)(\lambda^2 - 28\lambda + 147) - 2(4\lambda - 12) - 2(96 - 8\lambda).$$

展開します。 $(5 - \lambda)(\lambda^2 - 28\lambda + 147)$:

$$= 5(\lambda^2 - 28\lambda + 147) - \lambda(\lambda^2 - 28\lambda + 147) = 5\lambda^2 - 140\lambda + 735 - (\lambda^3 - 28\lambda^2 + 147\lambda) = -\lambda$$

$$\text{次に } -2(4\lambda - 12) = -8\lambda + 24,$$

$$-2(96 - 8\lambda) = -192 + 16\lambda.$$

よって

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda^3 + 33\lambda^2 - 287\lambda + 735) - 8\lambda + 24 - 192 + 16\lambda.$$

λ の項をまとめます：

$$-287\lambda - 8\lambda + 16\lambda = -279\lambda.$$

$$\text{定数項は } 735 + 24 - 192 = 567.$$

よって

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 33\lambda^2 - 279\lambda + 567.$$

先頭を正にするため -1 倍:

$$\lambda^3 - 33\lambda^2 + 279\lambda - 567 = 0.$$

3. 固有値の因数分解

整数解を試します。567は3で割れそうなので $\lambda = 3$ を代入してみます。

$$\lambda = 3:$$

$$3^3 - 33(3^2) + 279(3) - 567 = 27 - 297 + 837 - 567.$$

$$\text{計算: } 27 - 297 = -270, -270 + 837 = 567, 567 - 567 = 0.$$

よって $\lambda = 3$ が解です。

$(\lambda - 3)$ で割ります。割り算を行うと

$$\lambda^3 - 33\lambda^2 + 279\lambda - 567 = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 30\lambda + 189).$$

次に $\lambda^2 - 30\lambda + 189$ を因数分解します。189の因数で30を合計する組は9と21です。

$$\lambda^2 - 30\lambda + 189 = (\lambda - 9)(\lambda - 21).$$

よって固有値は

$$\lambda = 3, \quad 9, \quad 21.$$

4. 固有ベクトルの求め方

(1) $\lambda = 3$ の場合

$(A - 3I)x = 0$ を解きます。

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 5-3 & 2 & -2 \\ -4 & 17-3 & 4 \\ -8 & 10 & 11-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -4 & 14 & 4 \\ -8 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

1行目より $2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$ を簡略化: $x_1 + x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 + x_3$.

2行目: $-4x_1 + 14x_2 + 4x_3 = 0$.

ここに $x_1 = -x_2 + x_3$ を代入: $-4(-x_2 + x_3) + 14x_2 + 4x_3 = 4x_2 - 4x_3 + 14x_2 + 4x_3 = 18x_2 = 0$. よって $x_2 = 0$.

よって $x_1 = x_3$.

よって固有ベクトルは $x_3 = 1$ として

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $\lambda = 9$ の場合

$(A - 9I)x = 0$:

$$A - 9I = \begin{pmatrix} 5-9 & 2 & -2 \\ -4 & 17-9 & 4 \\ -8 & 10 & 11-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -4 & 8 & 4 \\ -8 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

1行目: $-4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$.

2行目: $-4x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 0$.

1行目を簡単化するため -2 で割ると: $2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_1 + x_3$.

2行目に代入: $-4x_1 + 8(2x_1 + x_3) + 4x_3 = -4x_1 + 16x_1 + 8x_3 + 4x_3 = 12x_1 + 12x_3 = 0$.

よって $12x_1 = -12x_3 \Rightarrow x_1 = -x_3$.

しかしここは整数比で揃えましょう。たとえば $x_3 = 3$ とすると $x_1 = -3$ となり、 $x_2 = 2(-3) + 3 = -6 + 3 = -3$ 。より簡単には $x_3 = 1$ とすると $x_1 = -1$ になってしまいますが、整数比をとるためもう少し考えます。

実はどんな比例でもよいので $x_3 = 1$ で続けます。 $x_1 = -1, x_2 = 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1$.

全てに3をかけて整数比にすると: $(x_1, x_2, x_3) = (-3, -3, 3)$ となります。

よって

$$v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

倍数を変えてもよいので、簡単に $(-1, -1, 1)$ でも固有ベクトルです。

よりシンプルに

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とできます。

(3) $\lambda = 21$ の場合

$(A - 21I)x = 0$:

$$A - 21I = \begin{pmatrix} 5 - 21 & 2 & -2 \\ -4 & 17 - 21 & 4 \\ -8 & 10 & 11 - 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 2 & -2 \\ -4 & -4 & 4 \\ -8 & 10 & -10 \end{pmatrix}.$$

1行目: $-16x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$ 。

-2 で割って簡単化: $8x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 8x_1 + x_3$ 。

2行目: $-4x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0$ 。

$x_2 = 8x_1 + x_3$ を代入:

$$-4x_1 - 4(8x_1 + x_3) + 4x_3 = -4x_1 - 32x_1 - 4x_3 + 4x_3 = -36x_1 = 0.$$

よって $x_1 = 0$ 。

すると $x_2 = 8(0) + x_3 = x_3$ 。

よって $(x_1, x_2, x_3) = (0, x_3, x_3) = x_3(0, 1, 1)$ 。

$x_3 = 1$ として

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

まとめ

- 固有値と対応する固有ベクトルは以下の通り:

$$\lambda_1 = 3, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 9, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 21, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

任意のスカラー倍は可能ですが、上記が比較的簡易な代表例です。

行列固有値ベクトル



行列 A を

(3 0 1)

(0 3 2)

(1 -1 5)

としたとき、この A の固有値、固有ベクトルの対をすべて求めてください。



以下は行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルの求め方と結果である。

ステップ1：固有値の求定

固有値 λ は $\det(A - \lambda I) = 0$ を解くことで得られる。

まず $(A - \lambda I)$ は

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3 - \lambda & 2 \\ 1 & -1 & 5 - \lambda \end{pmatrix}.$$

この行列式を求める。1行目展開で行うと、

$$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ -1 & 5 - \lambda \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 - \lambda \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

最初の小行列式：

$$\det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ -1 & 5 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)(5 - \lambda) - 2(-1) = (3 - \lambda)(5 - \lambda) + 2.$$

展開すると、

$$(3 - \lambda)(5 - \lambda) = 15 - 8\lambda + \lambda^2 \text{ より、}$$

$$(3 - \lambda)(5 - \lambda) + 2 = \lambda^2 - 8\lambda + 17.$$

よって1つ目の項は

$$(3 - \lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 17).$$

次に2つ目の行列式：

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 3-\lambda \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot (-1) - 1 \cdot (3-\lambda) = \lambda - 3.$$

従って

$$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 17) + (\lambda - 3).$$

$(3 - \lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 17)$ を展開すると、

$$(3 - \lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 17) = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 41\lambda + 51.$$

従って

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda^3 + 11\lambda^2 - 41\lambda + 51) + (\lambda - 3) = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 40\lambda + 48.$$

-1 を掛けて整理すると、

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^3 - 11\lambda^2 + 40\lambda - 48 = 0.$$

ここで、 $\lambda = 3$ を代入してみると、

$$3^3 - 11 \cdot 3^2 + 40 \cdot 3 - 48 = 27 - 99 + 120 - 48 = 0$$

よって $\lambda = 3$ は根である。

よって $(\lambda - 3)$ で因数分解する：

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 40\lambda - 48 = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 8\lambda + 16).$$

$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ の解を求めると、判別式は

$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$ であり、重解を持つ。

よって

$$\lambda = \frac{8}{2} = 4$$

が二重根となる。

まとめると、固有値は

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 4 \text{ (重複度2)}.$$

ステップ2：固有ベクトルの求定

1. $\lambda = 3$ の場合

$(A - 3I)$ を求める：

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 3-3 & 0 & 1 \\ 0 & 3-3 & 2 \\ 1 & -1 & 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

この連立方程式を (x, y, z) について解く。上2行から

$$x_3 = z = 0$$

でなければならない(上2行は z を0に強制する)。

3行目は

$$x - y + 2z = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y.$$

したがって

$$z = 0, x = y.$$

パラメータを t として $x = t, y = t, z = 0$ より固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の倍数で表せる。

よって $\lambda = 3$ に対する固有ベクトルは

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. $\lambda = 4$ の場合

$(A - 4I)$ を計算する：

$$A - 4I = \begin{pmatrix} 3-4 & 0 & 1 \\ 0 & 3-4 & 2 \\ 1 & -1 & 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

連立方程式は

$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

1式より $x = z$ 。

2式より $y = 2z$ 。

3式は $x - y + z = z - 2z + z = 0$ で常に成り立つ。

よって

$$x = z, y = 2z, z = z.$$

z をパラメータ s とすると

$$(x, y, z) = (s, 2s, s) = s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって $\lambda = 4$ に対する固有ベクトルは

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

注意すべき点は、 $\lambda = 4$ は重根であるにもかかわらず、この固有方程式から得られる固有ベクトルは1本しかないため、 $\lambda = 4$ の固有空間の次元は1である。従ってこの行列は対角化可能ではないが、問題文は固有値と固有ベクトルの対を求めるだけなので、これで十分である。

最終結果:

- 固有値：

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 4 \text{ (二重根)}.$$

- 対応する固有ベクトル：
 $\lambda = 3$ に対して

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 4$ に対して

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

以上がすべての固有値と固有ベクトルの対である。

ケーリー・ハミルトンの定理



ケーリー・ハミルトンの定理を知っていますか？



はい、ケーリー・ハミルトンの定理（Cayley-Hamilton theorem）を知っています。

この定理は線型代数学における重要な定理のひとつで、「**任意の正方行列は、その行列の固有多項式を自らが満たす**」という主張です。もう少し詳しく言うと、ある $n \times n$ 行列 A が与えられたとき、その特徴多項式（固有多項式）を

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

とします。このとき、ケーリー・ハミルトンの定理は

$$p(A) = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1A + c_0I = O$$

が成り立つ、というものです。ここで O は零行列、 I は恒等行列です。この定理は行列の固有値や対角化、ジョルダン標準形など、多くの応用や証明で基本的なツールとなっています。



では、行列 A を

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

としたとき、ケーリー・ハミルトンの定理を使って A^{100} を求めてください。



以下に詳細な解法と結果を示します。

ステップ1：行列 A の特徴多項式の求め方

与えられた行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ の特徴多項式（固有多項式）を求めます。

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 2) - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

よって、

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

ステップ2：ケーリー・ハミルトンの定理の適用

ケーリー・ハミルトンの定理より、行列 A は自分自身の特徴多項式を満たします。つまり、

$$p(A) = A^2 - 4A + 3I = O.$$

これを变形すると、

$$A^2 = 4A - 3I.$$

ステップ3：ベクトル空間 $\{I, A\}$ への閉じ込み

上記の関係式より、任意のべき A^n を I と A の線形結合として表すことができます。なぜなら、 A^2 がすでに A と I で表せるため、再帰的に高次べきも同様に表現できるからです。

実際、関係式から以下の漸化式が導けます。

$$A^n = 4A^{n-1} - 3A^{n-2} \quad (n \geq 2).$$

ここで、 A^n を次のように仮定します。

$$A^n = x_n A + y_n I.$$

初期条件：

- $A^0 = I$ より、 $x_0 = 0, y_0 = 1$ 。
- $A^1 = A$ より、 $x_1 = 1, y_1 = 0$ 。

漸化式：

$$A^n = 4A^{n-1} - 3A^{n-2} \implies x_n A + y_n I = 4(x_{n-1} A + y_{n-1} I) - 3(x_{n-2} A + y_{n-2} I).$$

よって係数比較より

$$x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2}, \quad y_n = 4y_{n-1} - 3y_{n-2}.$$

ステップ4：係数列 x_n, y_n の求解

特徴多項式は $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ であり、固有根は $\lambda = 1$ と $\lambda = 3$ です。この漸化式は各々の列 x_n, y_n に対して同じ形を与えます。

まず x_n について解きます。

特性方程式が同じなので、

$$x_n = \alpha \cdot 3^n + \beta \cdot 1^n = \alpha 3^n + \beta.$$

初期条件：

- $x_0 = 0 \implies \alpha \cdot 3^0 + \beta = \alpha + \beta = 0$ (1)
- $x_1 = 1 \implies \alpha \cdot 3^1 + \beta = 3\alpha + \beta = 1$ (2)

(1)式より $\beta = -\alpha$ 。これを(2)に代入すると

$$3\alpha - \alpha = 2\alpha = 1 \implies \alpha = \frac{1}{2}.$$

よって $\beta = -\frac{1}{2}$ 。したがって、

$$x_n = \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

同様に y_n も同様の形で解けます。

$$y_n = \gamma 3^n + \delta.$$

初期条件：

- $y_0 = 1 \Rightarrow \gamma + \delta = 1$ (3)
- $y_1 = 0 \Rightarrow 3\gamma + \delta = 0$ (4)

(4)より $\delta = -3\gamma$ 。これを(3)に代入：

$$\gamma - 3\gamma = -2\gamma = 1 \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{2}.$$

$\delta = -3(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$ 。よって

$$y_n = -\frac{1}{2}3^n + \frac{3}{2} = \frac{3 - 3^n}{2}.$$

ステップ5：一般項のまとめ

従って、

$$A^n = x_n A + y_n I = \frac{3^n - 1}{2} A + \frac{3 - 3^n}{2} I.$$

ステップ6： A^{100} の具体形

$n = 100$ を代入すると、

$$A^{100} = \frac{3^{100} - 1}{2} A + \frac{3 - 3^{100}}{2} I.$$

ここで、元の行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を用いて明示的に書き出すこともできます。

$$A^{100} = \frac{3^{100} - 1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{3 - 3^{100}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

成分ごとに計算すると、

- 左上成分：

$$\frac{3^{100} - 1}{2} \cdot 2 + \frac{3 - 3^{100}}{2} \cdot 1 = (3^{100} - 1) + \frac{3 - 3^{100}}{2} = \frac{2(3^{100} - 1) + (3 - 3^{100})}{2} = \frac{3^{100} + 1}{2}.$$

- 右上成分：

$$\frac{3^{100} - 1}{2} \cdot (-1) + \frac{3 - 3^{100}}{2} \cdot 0 = -\frac{3^{100} - 1}{2}.$$

- 左下成分も右上成分と同様：

$$-\frac{3^{100}-1}{2}.$$

- 右下成分も左上成分と対称性から同様に：

$$\frac{3^{100}+1}{2}.$$

従って、

$$A^{100} = \begin{pmatrix} \frac{3^{100}+1}{2} & -\frac{3^{100}-1}{2} \\ -\frac{3^{100}-1}{2} & \frac{3^{100}+1}{2} \end{pmatrix}.$$

最終結果：

$$A^{100} = \begin{pmatrix} \frac{3^{100}+1}{2} & -\frac{3^{100}-1}{2} \\ -\frac{3^{100}-1}{2} & \frac{3^{100}+1}{2} \end{pmatrix}.$$

これがケーリー・ハミルトンの定理を用いた A^{100} の求め方と結果です。

行列指数関数の計算



行列 A を
 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
 としたとき、 $\exp(A)$ を求めてください。



以下に計算過程を示しながら、結果を求めます。

ステップ1：固有値の求解

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めます。

特性方程式は

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(2 - \lambda) - (-1)(-1) = (2 - \lambda)^2 - 1.$$

展開すると

$$(2 - \lambda)^2 - 1 = (\lambda^2 - 4\lambda + 4) - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

これを解くと

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

λ の解は

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}.$$

よって

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1.$$

ステップ2：固有ベクトル

$\lambda = 3$ に対して、 $(A - 3I)v = 0$ を解く。

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 2 - 3 & -1 \\ -1 & 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

この行列は第一行が $(-1, -1)$ であるから、任意の固有ベクトルとして $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が挙げられる。

$\lambda = 1$ に対して、 $(A - I)v = 0$ を解く。

$$A - I = \begin{pmatrix} 2-1 & -1 \\ -1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

この行列の行は等しく、 $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が固有ベクトルとなる。

ステップ3：対角化

固有ベクトルを並べた行列

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

固有値を並べた対角行列

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって

$$A = PDP^{-1}.$$

ステップ4：行列指数関数の計算

行列指数関数は対角化により

$$e^A = Pe^DP^{-1},$$

ここで

$$e^D = \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

まず P^{-1} を求める。行列 P の逆行列は

$$\det(P) = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 2,$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ とするのは誤りです。正しくは以下を再確認。}$$

ここで少し訂正します。行列 P は

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

その逆行列は

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det(P) = (1)(1) - (1)(-1) = 1 + 1 = 2.$$

よって

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ステップ5: e^A の直接計算

$$e^A = Pe^DP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

まず Pe^D を計算する:

$$Pe^D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot e^3 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot e \\ -1 \cdot e^3 + 1 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 1 \cdot e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^3 & e \\ -e^3 & e \end{pmatrix}.$$

次にこれに P^{-1} を掛ける:

$$(e^A) = \begin{pmatrix} e^3 & e \\ -e^3 & e \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^3 & e \\ -e^3 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

行列積を行う:

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^3 \cdot 1 + e \cdot 1 & e^3 \cdot (-1) + e \cdot 1 \\ -e^3 \cdot 1 + e \cdot 1 & -e^3 \cdot (-1) + e \cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^3 + e & -e^3 + e \\ -e^3 + e & e^3 + e \end{pmatrix}.$$

結果

したがって、

$$e^A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^3 + e & -e^3 + e \\ -e^3 + e & e^3 + e \end{pmatrix}.$$