

問1. 定義通りに Gram-Schmidt に適用する.

$$v_1 := \eta(u_1) = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}} u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} v_2 &:= \eta\left(u_2 - (u_2 \cdot v_1) v_1\right) = \eta\left(u_2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \eta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \eta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\right) = \eta\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5^2+2^2+1^2}} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3 &:= \eta\left(u_3 - (u_3 \cdot v_1) v_1 - (u_3 \cdot v_2) v_2\right) = \eta\left(u_3 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \left(\frac{7}{\sqrt{30}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \eta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{7}{30} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \eta\left(\begin{pmatrix} -1/6 \\ 1/3 \\ -1/6 \end{pmatrix}\right) = \eta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

と計算できて,

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ が得られる.}$$

例2. 二重定義通り+30分. $\{f_1, f_2\} \rightarrow \{e_1, e_2\}$ と対応する.

$$e_1 := \text{norm}(f_1) = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 x \cdot 1 \cdot 1 dx}} f_1 = \frac{1}{\sqrt{[\frac{1}{2}x^2]_0^1}} = \sqrt{2},$$

$$\begin{aligned} e_2 &:= \text{norm}(f_2 - (f_2 \cdot e_1)e_1) = \text{norm}\left(f_2 - \left(\int_0^1 x \cdot (1+x) \cdot \sqrt{2} dx\right) \cdot \sqrt{2}\right) \\ &= \text{norm}\left(f_2 - 2 \int_0^1 x^2 + x dx\right) = \text{norm}\left(f_2 - 2\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1\right) = \text{norm}\left((1+x) - \frac{4}{3}\right) \\ &= \text{norm}\left(x - \frac{2}{3}\right) = \frac{x - \frac{2}{3}}{\sqrt{\int_0^1 x(x - \frac{2}{3})^2 dx}} = 6\left(x - \frac{2}{3}\right) = 6x - 4, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

$\{\sqrt{2}, 6x-4\}$ を得る.

問3. 上三角化. 広義も含めて全ての固有ベクトルを求め. それを並べて P とすれば $P^{-1}AP$ は上三角.

m3-3

よって固有対を求めることから始める.

$$0 = \varphi_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 7-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda) \begin{vmatrix} 7-\lambda & -1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 35 + 1)$$

$$= (6-\lambda)^3 \quad \text{よって, 固有値は } 6 \text{ (三重).}$$

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ とし}$$

$\lambda = 6$ に対して $0 = (A - 6I)u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} u \Leftrightarrow (1 \ 1 \ -1)u = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0$

固有ベクトル

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + z \\ y = p_1 \text{ (自由パラメータ)} \\ z = p_2 \text{ (自由パラメータ)} \end{cases} \Leftrightarrow u = p_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ と表わす. } u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ の2つが}$$

(狭義の) 固有ベクトルである.

よってもう1つ, 広義の固有ベクトルを求める必要がある. それを v とすると,

$$(A - 6I)v = C_1 u_1 + C_2 u_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} -C_1 + C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \text{ よって, } C_1 = C_2 \text{ が要求される.}$$

よって $p_3 := C_1 = C_2$ とし, $\rightarrow (1 \ 1 \ -1)v = p_3 \Leftrightarrow x + y - z = p_3$ (次ページへ)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + z + p_3 \\ y = p_1 \\ z = p_2 \end{cases} \Leftrightarrow \mathcal{V} = P_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + P_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{U}_1} + P_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{U}_2}$$

不要. あ. てもいい.

より, $\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくといい.
 $\uparrow$
 $P_3 = C_1 = C_2 = 1$ としたコト
 になる.

 $\therefore P = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1 & \mathcal{U}_2 & \mathcal{V} \end{pmatrix}$ とすると, $A\mathcal{U}_1 = 6\mathcal{U}_1$, $A\mathcal{U}_2 = 6\mathcal{U}_2$, $A\mathcal{V} = 6\mathcal{V} + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$,

$$AP = P \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{つまり,} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{と変換.}$$

$$\begin{matrix} \text{---} & \text{---} \\ \textcircled{1} & \textcircled{1} \\ \text{---} & \text{---} \\ C_1 & C_2 \end{matrix}$$

ココに交わる. より

問4. まず単純に対角化. その後, 同じ固有値に対する固有ベクトル $\in GS$ に正規直交に.

まず固有対 λ .

$$0 = \varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 25 - 1) = -(\lambda-4)^2(\lambda-6) \text{ より } \lambda = 4 (\text{二重}), 6.$$

$$\lambda = 4 \text{ の場合 } 0 = (A - 4I)u_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u_4 \Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = p_1 \\ z = p_2 \end{cases} \Leftrightarrow u_4 = p_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_{4,1}} + p_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_{4,2} \text{ と } d.}$$

$$\lambda = 6 \text{ の場合 } 0 = (A - 6I)u_6 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} u_6 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow u_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ と } d.$$

あとは, $\{u_{4,1}, u_{4,2}\}$, $\{u_6\}$ 各々に Gram-Schmidt を適用すれば良い.

$$\underline{S_1 \text{ に対して}} \quad v_1 = \eta(u_{4,1}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \eta(u_{4,2} - (u_{4,2} | v_1) v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{S_2 \text{ に対して}} \quad v_3 = \eta(u_6) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって } P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ とすれば } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ であり, } AP = (4v_1, 4v_2, 6v_3) = \begin{pmatrix} -4/\sqrt{2} & 0 & 6/\sqrt{2} \\ 4/\sqrt{2} & 0 & 6/\sqrt{2} \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

向5. 向4で A の固有値が $4, 4, 6$ 事ことは計算した. よて全ての固有値 > 0 事 A は正定値.

よて有界の最小値が存在し、その時の x は $x_* = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 事. $f(x_*) = -x_*^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1$.
 $f(x)$ に

$$\begin{aligned} \underline{x_* \text{ を求めよ}} \quad & \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{③} \times \frac{1}{4}]{\text{①} - \text{②}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{①} \times \frac{1}{4}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1/4 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{②} - \text{①}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 6 & 0 & 9/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\text{③} \times \frac{3}{6}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{①} + \text{②}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{array} \right) \quad \text{よて } x_* = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 3/8 \\ -1/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\underline{f(x_*) \text{ を求めよ}} \quad f(x_*) = - \begin{pmatrix} 1/8 \\ 3/8 \\ -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 = - \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) + 1 = -1/8.$$