Mini Test 01 (線形代数学 II)

実施日 2024.11.07

問 1． 行列 $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 27 \\ -3 & 2 & -12 \\ 27 & -12 & 126 \end{pmatrix}$，ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 27 \end{pmatrix}$ に対し、連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

ただし，解が存在しない場合は最小自乗解を求めよ．また，解に任意パラメータ (複数もあり) が含まれる場合はそれらについてもきちんと記述せよ．

問 2． 変数 x の 3 次以下多項式の集合 $\boldsymbol{R}[x]_3$ に対し，集合 $W = \{\, f(x) \in \boldsymbol{R}[x]_3 \mid f'(5) = 0, f(3) = 0\}$ が $\boldsymbol{R}[x]_3$ の部分空間か否かを理由付きで答えよ．

また，もしも部分空間であるならばその基底を示せ．

問 3． 一次独立なベクトルの組 $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ に対し，

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 &= 2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - 3\boldsymbol{u}_3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2, \\ \boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3 \end{cases}$$

という関係にあるベクトルの組 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ が一次独立かどうか理由付きで答えよ．

また，もしも一次従属であるならば, $0 = C_1\boldsymbol{v}_1 + C_2\boldsymbol{v}_2 + C_3\boldsymbol{v}_3$ を満たす $\{C_1, C_2, C_3\}$ を示せ (ただし，C_1, C_2, C_3 のうち 2 つ以上は非ゼロとする)．

問 4． x の二次以下の多項式の集合 $\boldsymbol{R}[x]_2$ 中の多項式

$$\begin{cases} f_1 &= -1 + 4x + 6x^2, \\ f_2 &= -2 + 3x + 7x^2, \\ f_3 &= 1 + 2x + x^2, \\ f_4 &= 1 + 2x, \\ f_5 &= 1 + x + 2x^2 \end{cases}$$

の一次関係を調べよ．具体的には以下のように答えれば良い．

- この中で一次独立なベクトルの最大個数 r を求めてこれを解答し，
- 前の方から，r 個の一次独立なベクトルを挙げ，
- 残りのベクトルを，上で求めた r 個の一次独立なベクトルの一次結合で表わす．

問 5． 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ に対し、$\ker(A) = \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^5 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\,\}$ を求めよ．

また，$\ker(A)$ の次元 $\dim(\ker(A))$ を答えよ．

以上．

Mini Test 01 (線形代数学 II)

実施日 2024.11.07

問 1． 行列 $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 27 \\ -3 & 2 & -12 \\ 27 & -12 & 126 \end{pmatrix}$, ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 27 \end{pmatrix}$ に対し、連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

ただし，解が存在しない場合は最小自乗解を求めよ．また，解に任意パラメータ (複数もあり) が含まれる場合はそれらについてもきちんと記述せよ．

問 2． 変数 x の 3 次以下多項式の集合 $\boldsymbol{R}[x]_3$ に対し，集合 $W = \{\, f(x) \in \boldsymbol{R}[x]_3 \mid f'(5) = 0, f(3) = 0\}$ が $\boldsymbol{R}[x]_3$ の部分空間か否かを理由付きで答えよ．

また，もしも部分空間であるならばその基底を示せ．

問 3． 一次独立なベクトルの組 $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ に対し，

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 &= 2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - 3\boldsymbol{u}_3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2, \\ \boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3 \end{cases}$$

という関係にあるベクトルの組 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ が一次独立かどうか理由付きで答えよ．

また，もしも一次従属であるならば, $0 = C_1\boldsymbol{v}_1 + C_2\boldsymbol{v}_2 + C_3\boldsymbol{v}_3$ を満たす $\{C_1, C_2, C_3\}$ を示せ (ただし，C_1, C_2, C_3 のうち 2 つ以上は非ゼロとする)．

問 4． x の二次以下の多項式の集合 $\boldsymbol{R}[x]_2$ 中の多項式

$$\begin{cases} f_1 &= -1 + 4x + 6x^2, \\ f_2 &= -2 + 3x + 7x^2, \\ f_3 &= 1 + 2x + x^2, \\ f_4 &= 1 + 2x, \\ f_5 &= 1 + x + 2x^2 \end{cases}$$

の一次関係を調べよ．具体的には以下のように答えれば良い．

- この中で一次独立なベクトルの最大個数 r を求めてこれを解答し，
- 前の方から，r 個の一次独立なベクトルを挙げ，
- 残りのベクトルを，上で求めた r 個の一次独立なベクトルの一次結合で表わす．

問 5． 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ に対し、$\ker(A) = \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^5 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\,\}$ を求めよ．

また，$\ker(A)$ の次元 $\dim(\ker(A))$ を答えよ．

以上．