

線形代数と数式処理のライブラリを読み込み、独立変数 p の使用を宣言.

```
In [1]: using LinearAlgebra
        using SymPy
        @syms p
```

```
Out[1]: (p,)
```

Question 1. $Ax = b$ を解かしてみる.

```
In [2]: A = [ 1.0 2 3 4 5
              2 3 4 5 6
              3 4 5 6 8
              4 5 6 8 11
              5 6 8 11 15
              ]
```

```
Out[2]: 5x5 Matrix{Float64}:
 1.0  2.0  3.0  4.0  5.0
 2.0  3.0  4.0  5.0  6.0
 3.0  4.0  5.0  6.0  8.0
 4.0  5.0  6.0  8.0  11.0
 5.0  6.0  8.0  11.0  15.0
```

```
In [3]: b = [ 37.0, 46, 60, 76, 102 ]
```

```
Out[3]: 5-element Vector{Float64}:
 37.0
 46.0
 60.0
 76.0
 102.0
```

```
In [4]: x = A \ b
```

```
Out[4]: 5-element Vector{Float64}:
-1.9999999999999922
 0.9999999999999745
 8.000000000000023
-3.0000000000000093
 5.000000000000002
```

無事に解けて、答えを得た。満足だ.

Question 2. 同様にやってみるが...

```
In [5]: A = [
          1.0 2 3
          3 4 5
          9 10 11
          ]
```

```
Out[5]: 3×3 Matrix{Float64}:  
  1.0  2.0  3.0  
  3.0  4.0  5.0  
  9.0 10.0 11.0
```

```
In [6]: b = [ 1.0, 2, 3 ]
```

```
Out[6]: 3-element Vector{Float64}:  
  1.0  
  2.0  
  3.0
```

```
In [7]: x = A \ b
```

```
SingularException(3)
```

```
Stacktrace:
```

```
[1] checknonsingular  
   @ c:\julia\Julia-1.10.5\share\julia\stdlib\v1.10\LinearAlgebra\src\factorization.jl:68 [inlined]  
[2] checknonsingular  
   @ c:\julia\Julia-1.10.5\share\julia\stdlib\v1.10\LinearAlgebra\src\factorization.jl:71 [inlined]  
[3] #lu!#158  
   @ c:\julia\Julia-1.10.5\share\julia\stdlib\v1.10\LinearAlgebra\src\lu.jl:83 [inlined]  
[4] lu!  
   @ c:\julia\Julia-1.10.5\share\julia\stdlib\v1.10\LinearAlgebra\src\lu.jl:81 [inlined]  
[5] #lu#164  
   @ c:\julia\Julia-1.10.5\share\julia\stdlib\v1.10\LinearAlgebra\src\lu.jl:300 [inlined]  
[6] lu (repeats 2 times)  
   @ c:\julia\Julia-1.10.5\share\julia\stdlib\v1.10\LinearAlgebra\src\lu.jl:299 [inlined]  
[7] \{(A::Matrix{Float64}, B::Vector{Float64})  
   @ LinearAlgebra c:\julia\Julia-1.10.5\share\julia\stdlib\v1.10\LinearAlgebra\src\generic.jl:1124  
[8] top-level scope  
   @ In[7]:1
```

エラーが出る。少なくとも、普通に言うところの一意の解は無さそうだ。確認のためにも、 $\det(A)$ を計算して確かめる。

```
In [8]: det(A)
```

```
Out[8]: 0.0
```

とりあえず、一意の解はないことがこれで確認できた。

そして、 $\det(A) = 0$ の場合、 $Ax = b$ には「解がない」場合と、「無数に解がある」場合の2種類のケースが考えられる。

この2つのケースは、 A の rank と A の拡大係数行列 $\tilde{A}$ の rank を比べれば良い。

この2つの rank に違いがあれば「情報に矛盾が発生している」、つまり、解がない。逆に違いがなければ、「情報に矛盾はないが少ない」ということで、無数に解がある。

```
In [9]: rank(A)
```

```
Out[9]: 2
```

```
In [10]: tA = hcat(A, b)
```

```
Out[10]: 3×4 Matrix{Float64}:  
  1.0  2.0  3.0  1.0  
  3.0  4.0  5.0  2.0  
  9.0 10.0 11.0  3.0
```

```
In [11]: rank(tA)
```

```
Out[11]: 3
```

rank に違いがあるので、この場合は「解が無い」ということが確認できた。

Question 3. これも同様にやってみるが...

```
In [12]: A3 = A' * A
```

```
Out[12]: 3×3 Matrix{Float64}:  
  91.0  104.0  117.0  
 104.0  120.0  136.0  
 117.0  136.0  155.0
```

```
In [13]: b3 = A' * b
```

```
Out[13]: 3-element Vector{Float64}:  
 34.0  
 40.0  
 46.0
```

```
In [14]: x = A3 \ b3
```

```

SingularException(3)

Stacktrace:
 [1] checknonsingular
   @ c:\julia\Julia-1.10.5\share\julia\stdlib\v1.10\LinearAlgebra\src\factorization.jl:68 [inlined]
 [2] checknonsingular
   @ c:\julia\Julia-1.10.5\share\julia\stdlib\v1.10\LinearAlgebra\src\factorization.jl:71 [inlined]
 [3] #lu!#158
   @ c:\julia\Julia-1.10.5\share\julia\stdlib\v1.10\LinearAlgebra\src\lu.jl:83 [inlined]
 [4] lu!
   @ c:\julia\Julia-1.10.5\share\julia\stdlib\v1.10\LinearAlgebra\src\lu.jl:81 [inlined]
 [5] #lu#164
   @ c:\julia\Julia-1.10.5\share\julia\stdlib\v1.10\LinearAlgebra\src\lu.jl:300 [inlined]
 [6] lu (repeats 2 times)
   @ c:\julia\Julia-1.10.5\share\julia\stdlib\v1.10\LinearAlgebra\src\lu.jl:299 [inlined]
 [7] \ (A::Matrix{Float64}, B::Vector{Float64})
   @ LinearAlgebra c:\julia\Julia-1.10.5\share\julia\stdlib\v1.10\LinearAlgebra\src\generic.jl:1124
 [8] top-level scope
   @ In[14]:1

```

エラーが出る。先の問と同様に、 $\det(A3)$, $\text{rank}(A3)$, $\text{rank}(\tilde{A}3)$ を計算しよう。

```
In [15]: det(A3)
```

```
Out[15]: 0.0
```

```
In [16]: rank(A3)
```

```
Out[16]: 2
```

```
In [17]: tA3 = hcat( A3, b3 )
```

```
Out[17]: 3×4 Matrix{Float64}:
  91.0  104.0  117.0  34.0
 104.0  120.0  136.0  40.0
 117.0  136.0  155.0  46.0
```

```
In [18]: rank(tA3)
```

```
Out[18]: 2
```

この問では、 rank に変化がない。つまり、 $A3$ 行列は正則ではないけれども、連立一次方程式 $A3 * x = b3$ には矛盾がない。また、情報が実質的に 2 個 (= rank 数) しかない。

よって、この問には無数の解があることになる。

実際解いてみると(解き方は解法資料を参照しよう), 下記のようなになる。ただし、 $p \in \mathbb{R}$ は自由なパラメータだ。

```
In [19]: x = [ -10/13, 1.0, 0 ] + p * [ 1, -2, 1 ]
```

Out[19]:
$$\begin{bmatrix} p-0.769230769230769 \\ \frac{1.0-2p}{p} \end{bmatrix}$$

連立一次方程式にこの x を代入して、確かに成り立つことを確認しよう.

In [20]: `A3 * x - b3`

Out[20]:
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

たしかにこの x に対して, $A3 * x = b3$, すなわち $A^t Ax = A^t b$ が成り立っている.

In []: