§6.3 上三角化と(対称行列の)対角化

対角成分は固有値　　右上三角部分はゼロとは限らない.

Th.(Schur) 上三角化は必ず可能.

${}^{\forall}$正方行列 $\overset{n\times n}{A}$ に対し、${}^{\exists}$正則行列 P を用いて、 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ と上三角行列に必ず相似変換できる.

左下三角部分はゼロ.

(証明的なものは次のページ)

一回、三角化する P を求めてから、その $P=(x_1\ x_2 \cdots x_n)$ の $\{x_i\}_{i=1}^n$ を複素版Gram-Schmidtで正規直交化して $\tilde{P}=(e_1\ e_2 \cdots e_n)$ とすれば、$\tilde{P}$ はユニタリで A を三角化する.

✓そして、

- P をユニタリ行列とすることが可能. (P がユニタリ行列 $\overset{\mathrm{d}}{\Leftrightarrow}$ $P^{-1} = \overline{P^T}$) ← 複素共役直交行列とでも言うべきか.　P^* と書く.
- $\underbrace{A}_{\text{実正方行列}}$ の ${}^{\forall}$固有値 = 実数ならば P を直交行列とすることが可能. ← (${}^{\forall}$固有ベクトル = 実ベクトル) となるから.

(前ページのTh.の証明というより、解説)

このmを固有値λ_iの代数的重複度と言う。

Aの固有多項式の固有値λ_iに関する部分が$(t-\lambda_i)^m$だとしよう。しかしλ_iに対応する固有ベクトルがl_1本で、$l_1 < m$だとしよう。この時、

このl_1を固有値λ_iの幾何的重複度と言う。

要するに今まで教わったもの。

$(A-\lambda_i I)x_k^{(1)} = 0$ を満たす $x_k^{(1)}, k=1\sim l_1$ は Aの狭義固有ベクトルで、

$(\quad \text{〃} \quad)x_{k'}^{(2)} = \mathrm{span}\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_{l_1}^{(1)}\}$ は Aの2階の広義固有ベクトルだ。
$(k'=1\sim l_2)$

同様にしてλ_iに対する広義固有ベクトルを全て求めると、ちょうどm本になる。

これを $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_{l_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_{l_2}^{(2)}, x_1^{(3)}, \cdots \right)$ と並べて行列P_iとすると、

$Ax_{k'}^{(j+1)} = \lambda_i x_{k'}^{(j+1)} + \sum_{k=1}^{l_j} c_k x_k^{(j)}$ であるので $Ax_k^{(j+1)} = \left(x_1^{(j)}\ x_2^{(j)} \cdots x_{l_j}^{(j)}\ \ x_k^{(j+1)}\right)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{l_j} \\ \lambda_i \end{pmatrix}$ なので

$$AP_i = P_i \begin{pmatrix} \lambda_i & & * \\ & \lambda_i & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$ となる。

この操作を全ての固有値に対して行えば良い。

#6-3-3

例題. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ を上三角化せよ.

解答例. まず A の固有値問題を解く. すると 固有値 $= 5$ (三重), 固有ベクトル $= \underset{x_1^{(1)}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{x_2^{(1)}}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}$ と求まる. ($x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$ とおく.)

よって、広義固有ベクトルがもう1つ有るハズなのでそれを求める.

それを $x^{(2)}$ と書くと、定義より

$$(A-5I)\,x^{(2)} = C_1 x_1^{(1)} + C_2 x_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 2C_1 - C_2 \\ 3C_1 \\ 3C_2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} x^{(2)} = \begin{pmatrix} 2C_1 - C_2 \\ 3C_1 \\ 3C_2 \end{pmatrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -C_2 \neq 0, \\ -3x+2y-z = 3C_1 \end{cases}$$

$x^{(2)} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ として

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - C_1 \\ y = p_1 \ (\text{自由パラメータ}), \\ z = p_2 \ (\quad 〃 \quad) \end{cases} \Leftrightarrow x^{(2)} = -C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p_1\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_2\begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= -C_1\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{これだけで十分.}} + \frac{1}{3}p_1\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_1^{(1)}} + \frac{1}{3}p_2\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{x_2^{(1)}}$$

$x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$ そのもの. 既出.

よって

$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で良い.

($C_1 = -1$ に相当).

実際, $(A-5I)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\3\end{pmatrix} = (-1)\underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}}_{x_1^{(1)}} + 1\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}}_{x_2^{(1)}}$ でつじつまは合っている.

よって, $Ax^{(2)} = 5x^{(2)} - x_1^{(1)} + x_2^{(1)} = \left(x_1^{(1)}\ x_2^{(1)}\ x^{(2)}\right)\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}$ となるので,

$$A\left(x_1^{(1)}\ x_2^{(1)}\ x^{(2)}\right) = \left(x_1^{(1)}\ x_2^{(1)}\ x^{(2)}\right)\begin{pmatrix}5&0&-1\\0&5&1\\0&0&5\end{pmatrix}$$ となる. よって

$P = \left(x_1^{(1)}\ x_2^{(1)}\ x^{(2)}\right)$ ととれば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}5&0&-1\\0&5&1\\0&0&5\end{pmatrix}$ となり, 題意を満たす.

注. P が正則なのは固有ベクトルの一次独立性からほぼ自明だが、$\det P$ を計算して確かめても良い.

ここでちょっと便利な事実を.

- エルミート行列 A の固有値は全て実数である. (A がエルミート $\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ $\overline{A^T} = A$)

A の eigen pair を (λ, x) として、

$$x^* A x = x^* \lambda x = \lambda x^* x$$
$$x^* A^* x = (Ax)^* x = (\lambda x)^* x = \bar{\lambda} x^* x$$

より $\lambda = \bar{\lambda}$. ▨

- 実対称行列はエルミート行列なのでもちろん固有値 = 実数.

⇓ よって #6-3-1 の内容から

- A がエルミート行列ならば ユニタリ行列 P で A を対角化可能. ☆

why

$$P^* A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ の複素共役転置をとると、

$$P^* A^* P = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$P^* A^* P = P^* A P$$

より $* = 0$.

- A が実対称行列ならば 直交行列 P で A を対角化可能. ☆

why

$$P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ の転置をとると、

$$P^T A^T P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$P^T A^T P = P^T A P$$

より $* = 0$.

☆ 注 $P^{-1} = P^*$ or P^T なので、P^{-1} を計算しなくて良い!

#6-3-5の計算を実際に行うには？

→ 次のようにすれば良い。

1. §5.4で学んだ方法で、$\begin{pmatrix}\text{ユニタリ性}\\ \text{直交性}\end{pmatrix}$を気にせずに作った行列 P で $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ とする。

2. $P=\left(x_1\ x_2 \cdots\ x_n\right)$ を $\left(\underbrace{x_{\lambda_1,1},\ x_{\lambda_1,2}\ \cdots\ x_{\lambda_1,m_1}}_{\text{固有値}\lambda_1\text{に対する固有ベクトル}}\ \underbrace{x_{\lambda_2,1}\ \cdots\qquad}_{〃\ \lambda_2\ 〃}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{〃\ \lambda_3\ 〃}\ \cdots\right)$ と

(対角化可能な時は狭義固有ベクトルのみでそろう)

分割して、
同じ固有値に対する固有ベクトルをGram-Schmidtの直交化で「正規直交ベクトル」に変換し、
これを $y_{\lambda_k,1},\cdots,y_{\lambda_k,m_k}$ とする。

3. $\tilde{P}:=\left(y_{\lambda_1,1},\cdots,y_{\lambda_1,m_1},\ y_{\lambda_2,1},\cdots\right)$ とすると、$\tilde{P}$ は直交行列で、かつ、

$$\tilde{P}^{T}A\tilde{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$ となる。

例題 6.3.2 (教 p.126)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ を直交行列を用いて対角化する.

まず, 直交性を気にせずに ~~直交~~ 対角化する.

その為に、Aの eigen pair を求めよう.

$$0 = \varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{C1-C3}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2+\lambda \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{r3+r1}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & 4 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$= (2-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-8) = (2-\lambda)(\lambda+4)(\lambda-2)$ より, Aの固有値は $-4, 2, 2$.

$\lambda=-4$ の時, $\mathbb{O} = (A+4I)x_4 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} x_4 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3+C_2]{C_1-5C_2} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{6} \end{pmatrix}$ C₁とかぶるので不要

略す

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1-C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad -z = 0, \\ y+2z = 0, \\ z = p \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = p \\ y = -2p \\ z = p \end{cases} \Leftrightarrow x = p\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ より, 固有値 -4 に対する固有ベクトル x_4 は $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ととれる.

#6-3-8

$\lambda = 2$の時、$0 = (A-2I)x_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} x_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y = p_1 \\ z = p_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2p_1 - p_2 \\ y = p_1 \\ z = p_2 \end{cases} \Leftrightarrow x = p_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ より、固有値2に対する固有ベクトル2つは $\underset{\overset{\shortparallel}{x_{2,1}}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\overset{\shortparallel}{x_{2,2}}}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$ ととれる。

$$\begin{array}{c} \\ \\ \text{よって、} P := \end{array} \begin{array}{ccc} x_{2,1} & x_{2,2} & x_4 \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \end{array}$$

よって、$P := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$ と(普通の)対角化ができる。

$\underbrace{\text{固有値2に対する固有ベクトルs}}_{W_2}$ 　$\underbrace{〃\ -4\ 〃}_{W_{-4}}$

次に、上のW_2, W_{-4}のベクトルを各々、Gram-Schmidtで正規直交化すれば良い。

W_2は、$e_1 := \mathrm{n}(x_{2,1}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$e_2 := \mathrm{n}\left(x_{2,2} - (e_1, x_{2,2}) e_1 \right) = \mathrm{n}\left(x_{2,2} - \frac{1}{\sqrt{5}}(-2) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{n}\left(x_{2,2} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \mathrm{n}\left(\begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{n}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+4+25}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

W_{-4} は、$e_1 := \mathrm{n}(x_4) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$、 となるので、

気になる人は、
$\tilde{P}^T \cdot \tilde{P} = \tilde{P} \cdot \tilde{P}^T = I$ を確かめよう

$$\tilde{P} := \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$ とすると、$\tilde{P}$ は直交行列で、

$$\tilde{P}^T A \tilde{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$ と対角化できる.