§6.1 内積 〜 2つのベクトルの類似性を測る為の最初の手がかり.

def. 内積(inner product)とは, 2つのベクトルから1つのスカラー値(実数 or 複素数)を出力する二項演算で, 以下の性質を持つもの.

1. (交換) $(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = \overline{(\mathbb{b}, \mathbb{a})}$ ← 複素共役
2. (結合) $(c_1\mathbb{a}_1 + c_2\mathbb{a}_2, \mathbb{b}) = \overline{c_1}(\mathbb{a}_1, \mathbb{b}) + \overline{c_2}(\mathbb{a}_2, \mathbb{b})$
3. (自己) $(\mathbb{a}, \mathbb{a}) \geq 0$, かつ, $(\mathbb{a}, \mathbb{a}) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{a} = \mathbb{0}$.

1.より, 必ず実数になる.

… $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{V}$ に対し, 内積を $(\mathbb{a}, \mathbb{b})$ と書くとして.

注. $\mathbb{a} = \{a_i\}_{i=1}^n$, $\mathbb{b} = \{b_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$ に対して $(\mathbb{a}, \mathbb{b}) := \overline{a}_1 b_1 + \overline{a}_2 b_2 + \cdots + \overline{a}_n b_n = \overline{\mathbb{a}}^T \mathbb{b}$ を $\mathbb{C}^n$ の標準内積と言ったりする.

$\mathbb{R}^n$ の場合は $(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \mathbb{a}^T \mathbb{b}$ が標準内積だ.

注 内積は一意に決まらないよ。好きなもの，便利なものを作れる．

重みは0より大きければなんでも良い

例1．重みつきの内積 for $\mathbb{R}^n$ ： $(a, b) := a_1b_1 + 2a_2b_2 + 3a_3b_3 + \cdots + na_nb_n$ とか、

例2．多項式の集合 $V = \mathbb{R}[x]_n$ に対して

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx \,, \quad (a<b \,,\ f, g \in V) \quad \text{とか.}$$

さらに重みつきで

$$\text{〃} = \int_a^b \mu(x)f(x)g(x)\,dx \,, \quad (\text{〃} \quad \& \ \mu(x) > 0) \quad \text{とか.}$$

これも内積になりうる．

$$\text{〃} = \int_1^2 x^2 f(x)g(x)\,dx \,, \quad (\text{〃}) \quad \text{とか.}$$

内積の座標による計算(一般の基底で). #6-1-3

V の基底を $\{u_1, \cdots, u_n\}$, $a, b \in V$ を各々 $a = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_k}_{a\text{の座標}} u_k$, $b = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{b_k}_{b\text{の座標}} u_k$ とすると.

内積は

$$(a, b) = \left(\sum_i a_i u_i, \sum_j b_j u_j\right) = \sum_i \overline{a_i} \left(\sum_j \underbrace{(u_i, u_j)}_{M_{ij}\text{とする}} b_j\right)$$

$$= (\overline{a_1}\,\overline{a_2} \cdots \overline{a_n}) \underbrace{\begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ となる.

要は $(u_i, u_j) = \begin{cases} 1 : i = j \\ 0 : i \neq j \end{cases}$ な基底.

#6-2-1で扱う.

Point. U が正規直交基底の時は $M = I$ となって話が簡単なのだ.

例. $\mathbb{R}^3$ の基底を $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ として $a, b \in \mathbb{R}^3$ を $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して

$a = U \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $b = U \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ と座標表示すると、標準内積に対して

$$(a, b) = (a_1\ a_2\ a_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1(2b_1 + b_2 + b_3) + a_2(b_1 + 2b_2 + b_3) + a_3(b_1 + b_2 + 2b_3)$$

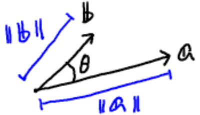
//

def. ベクトルの長さ（内積から自然に導かれるノルム）

$$\|a\| := \{(a, a)\}^{1/2}$$

$\mathbb{R}^n$の標準内積に対してはユークリッドノルムになる。その一般化だ。

↓さらに、



def. ベクトルの間の角度

$$\theta := \arccos\left(\frac{(a, b)}{\|a\| \cdot \|b\|}\right)$$

$\mathbb{R}^n$での標準内積の時、ユークリッドノルムを用いて $(a, b) = \|a\|\|b\|\cos\theta$ だったので、それを一般化したのだ。

def. 直交性

これも一般化だ。

$$a \text{ と } b \text{ が直交} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} (a, b) = 0. \quad (a, b \neq 0 \text{ として})$$

例1. $V = \mathbb{R}[x]_1$ で $f, g \in V$ に対して $(f, g) := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ の時、

確認しておこう！

- $a = 1 + x$ に対して $\|a\| = \sqrt{7/3}$
- $b = x - 1$ 〃
- aと直交するベクトルは $3x - 5/3$,
- aとbの間の角度は $2.42786\cdots$ rad.

etc. と計算できる。

いくつかの有用な不等式. 〜当たり前のように多用するぞ.

- Schwartzの不等式: $|(\mathbb{a}, \mathbb{b})| \leq \|\mathbb{a}\| \|\mathbb{b}\|$

で 絶対値抜きで等号が成り立つのは $\mathbb{a}$と$\mathbb{b}$の間の角度 $= 0$ の時. ($\mathbb{a}, \mathbb{b} \neq \mathbb{0}$として)
つまり、$\mathbb{a}$と$\mathbb{b}$が同じ向きの時だ.

- 三角不等式: $\|\mathbb{a} + \mathbb{b}\| \leq \|\mathbb{a}\| + \|\mathbb{b}\|$

・この2つの不等式が #6-1-3 下部の $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ に対して成り立つコトを確かめておこう.

(オマケ) ベクトル空間 V の部分空間 W に対して、

$$W^{\perp} := \{ \mathbb{a} \in V \mid (\mathbb{a}, \mathbb{b}) = 0 \text{ for } {}^{\forall}\mathbb{b} \in W \}$$

を W の直交補空間と言う.