

6.5.3 固有値 ... 線形写像の特徴・性質として重要なもの.

#5-3-1

def. 正方行列 A に対し、 $Au = \lambda u$, ただし $\lambda \in \mathbb{C}$, $u \neq 0$ が成り立つ時、

$\begin{cases} \lambda: A \text{ の固有値 (eigen value),} \\ u: \text{ " 固有ベクトル (eigen vector)} \end{cases}$ \leftarrow このペアを eigen pair と言ったりする

と言う.

$\rightarrow W_\lambda := \{ u \mid Au = \lambda u \}$ は A の固有値 λ の固有空間と言ったりする.

注: ^{線形} $T: U \rightarrow V$ に対し、 $T(u) = \lambda u$, $u \neq 0$ の時、 $\lambda \in T$ の固有値、 $u \in T$ の固有ベクトルと言う.

この λ と u は基底のとり方に関係ないことに注意.

そして、^{線形} $T: U \rightarrow U$ で U の基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ に対し、 T の表現行列を A_T とすると、

• T の固有値 $\lambda = A_T$ の固有値 λ

• T の固有ベクトル $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

$\underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}}_{A_T \text{ の固有ベクトル}}$

つまり、 A_T の固有ベクトルは T の固有ベクトルの座標.

固有値・固有ベクトルの求め方 (Th. 5.3.1 相当)

$Au = \lambda u \Leftrightarrow (A - \lambda I)u = 0, u \neq 0$ なので $A - \lambda I$ は非正則。 ← もし $(A - \lambda I)$ が正則だと、 $u = (A - \lambda I)^{-1} 0 = 0$ で矛盾。

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0. \quad \dots (*)$$

これは A の固有方程式 (変数は λ) と言う。

(*) は λ の n 次方程式 $= 0$ (A が $n \times n$ の場合) なので、解けば (重複込みで) n 個の固有値が求まる ①

さらに、求まった各々の λ に対して、

$(A - \lambda I)u = 0$ を解いて、対応する固有ベクトルも求まる。 ②

↑
λの数字を代入する

注. 固有ベクトルを全て集めても n 本無いかも。つまり、

$$\dim(\text{span}(\text{全ての固有ベクトル})) \leq n.$$

↓
 $\dim(\dots) < n$ の時は広義固有ベクトルが存在して... (おぼろしい内容. 略).

計算の例. $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ の eigen pair を求めよ.

#5-3-3

Step 1. 固有値を求めよ.

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -6 \\ 3 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (7-\lambda)(-2-\lambda) - (-6) \cdot 3 = (\lambda-7)(\lambda+2) + 18 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda-1)(\lambda-4) \quad \text{よって, } \lambda = 1, 4 \quad (\text{この2つが固有値}) \end{aligned}$$

Step 2. 対応する固有ベクトルを求めよ.

固有値 1 に対して $(A - 1 \cdot I)u = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} u = 0 \Leftrightarrow u_1 - u_2 = 0$ より.

$$u = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \neq 0 \quad \text{が固有値 1 に対する固有ベクトル.}$$

固有値 4 に対して $(A - 4I)u = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} u = 0 \Leftrightarrow u_1 - 2u_2 = 0$ より.

$$u = c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \neq 0 \quad \text{が固有値 4 に対する固有ベクトル.}$$

Th. 5.3.2 (ヤリ・ハミルトン)

$n \times n$ 行列 A の固有方程式 $|A - \lambda I|$ を $\varphi_A(\lambda)$ と書き、この n 次多項式 $\varphi_A(\lambda)$ の λ に A を代入した式 $\varphi_A(A)$ について、
(ただし λ^0 項には I を代入する)

$$\varphi_A(A) = O \leftarrow \text{行列}$$

が成り立つ (証略).

例. #5-3-3 の A に対しやってみる. $\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4$ なので.

$$\begin{aligned} \varphi_A(A) &= A^2 - 5A + 4I = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^2 - 5 \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 31 & -30 \\ 15 & -14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 35 & -30 \\ 15 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で、確かに正しい.

ケリー・ハミルトン Th. の使い途.

$0 = \varphi_A(A) = A$ の n 次多項式 $\varphi_A(x)$ のため、 $A^n = A$ の $(n-1)$ 次多項式 と変形できる。
よって、それをくり返して考えると、

$$A^m = A \text{ の } (n-1) \text{ 次多項式} \quad (\forall m \geq n)$$

と変形できる。つまり、 A の n 乗以上は、より低次の計算で済んでしまうのだ。

↑
結論 役に立つ。

例. #5-3-3のAを对象に、 A^{20} を計算してみよう.

まず、 A^{20} を $\varphi_A(A) = A^2 - 5A + 4I$ で割ってみると、

$$A^{20} = \underbrace{(A^{18} + 5A^{17} + \dots)}_{\text{商, 計算しよ!}} \cdot \underbrace{(A^2 - 5A + 4I)}_{\varphi_A(A)} + \underbrace{C_1 A + C_0 I}_{\text{余り}} \quad \dots (*) \quad \text{とまる.}$$

C_1, C_0 はスカラー.

この割り算はスカラーでの計算と同じなので、 $x \in \mathbb{R}$ に対しても同じ形、係数で

$$x^{20} = (x^{18} + 5x^{17} + \dots) \cdot \underbrace{(x^2 - 5x + 4)}_{\varphi_A(x)} + C_1 x + C_0$$

が成り立つ.

$$\varphi_A(1) = \varphi_A(4) = 0 \text{ を上手く利用して } \begin{cases} 1^{20} = C_1 \cdot 1 + C_0 \\ 4^{20} = C_1 \cdot 4 + C_0 \end{cases} \text{ とするのを、} \begin{cases} C_1 = \frac{4^{20} - 1}{3} \\ C_0 = \frac{4 - 4^{20}}{3} \end{cases} \text{ を得る.}$$

これを(*)に代入すると、

$$A^{20} = 4^{20} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ と求められる. //}$$

注. この場合、 $A^m = 4^m \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $m \geq 2$ と一般化できてしまうぞ。

固有値と正則性の関係

5-3-7

Th. $n \times n$ 行列 A が正則 $\Leftrightarrow A$ は 0 を固有値に持たない.

つり、
∀ 固有値 $\neq 0$.

証明) Th. 2.4.2 より、 A が非正則 $\Leftrightarrow A u = 0$ を満たす $u \neq 0$ が存在する

〃
 $0 u$ と考えると、

$\Leftrightarrow A u = 0 u, \exists u \neq 0$

$\Leftrightarrow A$ は 0 を固有値に持つ. \square

注: 次ページ #5-3-8 の知識 $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ を使えば、もっと直接的に証明できる。

固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ と他の式の関係

#5-3-8

$$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & a_{22} - \lambda & & \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \xleftarrow{(*) \text{ として}} = (-1)^n \lambda^n + \dots + C_1 \lambda + C_0$$

固有値 λ_k は $\varphi(\lambda) = 0$ の根。
 \swarrow

$$= (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \text{ と考えよ。}$$

解と係数の関係より、

$$\begin{cases} C_0 = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n, \\ C_{n-1} = (-1)^{n-1} (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) \end{cases} \sim (*)$$

また、(*) の形より、

$$\begin{cases} C_0 = \det A, \leftarrow \lambda = 0 \text{ とすればこうなる。} \\ C_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^n a_{kk} \end{cases}$$

$\leftarrow (*)$ の λ^{n-1} は対角成分の積から $\det A$ のみで。
 $\sim (*)$ とするので、
 $\text{Tr}(A)$ と書く。
 トレス \swarrow
 対角成分の和。

$$\begin{cases} \underline{\det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n,} \\ \underline{\text{Tr } A = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} \end{cases} \text{ である。}$$

det, Tr の性質でよく使うもの.

- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, for 正定行列 A, B .
 $= \det(BA)$

応用例. $\underbrace{|I|}_{1} = |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$ より, $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

- $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, for $\begin{matrix} n \times m \\ A \end{matrix}$, $\begin{matrix} m \times n \\ B \end{matrix}$.

応用例. 正則行列 P により, $B := P^{-1}AP$ とした時.
↖ 5.4 で良く出てくる「対角化」もこの形.

$$\text{Tr}(B) = \text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(AP P^{-1}) = \text{Tr}(A).$$