§5.2. 線形写像を座標で表わす.

まず最初に、ベクトルの座標表示を(あらためて)示しておく.

基底が $\{\mathbb{u}_1, \cdots, \mathbb{u}_n\}$ であるベクトルsp. U に対し、その元 $\mathbb{u} \in U$ は

基底を変えると変わっちゃうよ.

$$\mathbb{u} = u_1\mathbb{u}_1 + u_2\mathbb{u}_2 + \cdots + u_n\mathbb{u}_n$$ と一意に表わせて、この $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ を $\mathbb{u}$ の座標と言う.

注. $$= \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbb{u}_i$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbb{u}_1 & \mathbb{u}_2 & \cdots & \mathbb{u}_n \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}}_{\text{ココ}}$$ と書けるコトに注意.

逆に、この形の時、ココ は $\mathbb{u}$ の座標であるコトにも注意.

線形 $T: U \to V$ (n次元 → m次元) に対し、Uの基底 $\{\mathbb{u}_1, \cdots, \mathbb{u}_n\}$, Vの基底 $\{\mathbb{v}_1, \cdots, \mathbb{v}_m\}$ のもとで、

$\mathbb{u} \in U$ の座標 $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ が Tによって $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$ になる時、どう表わされるか を見よう。

まず、$\underset{\substack{\cup \\ \mathbb{u}}}{}$ $\mathbb{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbb{u}_i$ に対し、

$$T(\mathbb{u}) = T\left(\sum_{i=1}^{n} u_i \mathbb{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} u_i T(\mathbb{u}_i) = \begin{pmatrix} T(\mathbb{u}_1) & \cdots & T(\mathbb{u}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \cdots (*1)$$

次に、
$$T(\mathbb{u}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_j^{(i)} \mathbb{v}_j = \begin{pmatrix} \mathbb{v}_1 & \cdots & \mathbb{v}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(i)} \\ a_2^{(i)} \\ \vdots \\ a_m^{(i)} \end{pmatrix} \quad \cdots (*2)$$

(*2) を (*1) に代入して

$$T(\mathbb{u}) = \begin{pmatrix} \mathbb{v}_1 & \cdots & \mathbb{v}_m \end{pmatrix} \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & \cdots & a_1^{(n)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & \cdots & a_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m^{(1)} & a_m^{(2)} & \cdots & a_m^{(n)} \end{pmatrix}}_{A_T} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}}_{\mathbb{u}\text{の座標}}}_{\mathbb{v} = T(\mathbb{u})\text{の座標}}$$

となり
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = A_T \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

と書ける。

Tの表現行列と言う。

#5-2-3

Point. $\begin{pmatrix} T(u_1) & T(u_2) & \cdots & T(u_n) \end{pmatrix} = (v_1 \cdots v_m)\, A_T$ と覚えると楽だろう.

$\underline{\text{例題}}$ 5.2.3(2) (教p.96) をやってみると. $T : \overset{U}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}[x]_2}} \to \overset{V}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}[x]_2}}$ で, U, V の基底は $\left\{ \overset{v_1}{\overset{\shortparallel}{\overset{u_1}{\overset{\shortparallel}{1+x}}}},\ \overset{v_2}{\overset{\shortparallel}{\overset{u_2}{\overset{\shortparallel}{x+x^2}}}},\ \overset{v_3}{\overset{\shortparallel}{\overset{u_3}{\overset{\shortparallel}{x^2}}}} \right\}$.

で, $T(f) = f' \cdot x + f(0)x^2 + f(1)$.

(∗1)として

よって, $(v_1\ v_2\ v_3)A_T = \begin{pmatrix} T(u_1) & T(u_2) & T(u_3) \end{pmatrix} =$ (計算しよう) $= \begin{pmatrix} 2+x+x^2, & 2+x+2x^2, & 1+2x^2 \end{pmatrix}$

で, $\begin{cases} 2+x+x^2 = 2(1+x) - x + x^2 = 2v_1 - (x+x^2) + 2x^2 = 2v_1 - v_2 + 2v_3 = (v_1\ v_2\ v_3)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ 2+x+2x^2 = (\text{同様にして})\ 2v_1 - v_2 + 3v_3 = (v_1\ v_2\ v_3)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ 1+2x^2 = \quad〃 \quad v_1 - v_2 + 3v_3 = (\quad〃\quad)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}$ を(∗1)に代入して

$(v_1\ v_2\ v_3)A_T = (v_1\ v_2\ v_3)\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{ココ}}$ となるので が A_T.

Th. 5.2.1 基底を変えたら表現行列はどう変わるか？

前提：$\overset{\text{線形}}{T} : \overset{n\,\dim}{U} \to \overset{m\,\dim}{V}$，$U$の基底$\{u_1, \cdots u_n\}$，$V$の基底$\{v_1, \cdots, v_m\}$，$T$の表現行列は$A_T$.

<u>Q.</u> この時，Uの基底を$\{\tilde{u}_1, \cdots, \tilde{u}_n\}$に，$V$の基底を$\{\tilde{v}_1, \cdots, \tilde{v}_m\}$に変えたら$\tilde{A}_T$は？

ただし，$(\tilde{u}_1, \cdots, \tilde{u}_n) = (u_1, \cdots, u_n)P$，$(\tilde{v}_1, \cdots, \tilde{v}_m) = (v_1, \cdots, v_m)Q$ と書ける．

（P, Qは正則行列．基底の変換行列とも言われる）

<u>A.</u> $\tilde{A}_T = Q^{-1} A_T P$.

証明） $u = (u_1 \cdots u_n)\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = (\tilde{u}_1 \cdots \tilde{u}_n)\begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}_n \end{pmatrix} = (u_1 \cdots u_n)P\begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}_n \end{pmatrix}$ より．

基底の変換により座標は $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}_n \end{pmatrix}$ となる．

よって$T(u)$の座標を$\begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_m \end{pmatrix}$とすると $\begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_m \end{pmatrix} = Q^{-1}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = Q^{-1}A_T\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \underbrace{Q^{-1}A_T P}_{\tilde{A}_T}\begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}_n \end{pmatrix}$. ▨