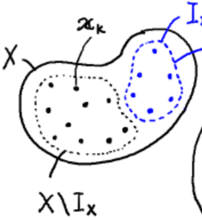
§4.3 一次独立なベクトルの最大個数



Xの中で一次独立なベクトル集合で最も元の数が多いものを考え、これを $\underbrace{\{x_{I_1}, x_{I_2}, \cdots, x_{I_r}\}}_{I_X\text{とする}}$ とおく。 → この元の数 r を集合 X のベクトルの一次独立な最大個数と言う。

（つまり、$X = \{x_i\}_{i=1}^{m}$ の中から r 個の一次独立な x_i を見つけることができるが、$(r+1)$ 個で一次独立なものは見つからない）

$\Updownarrow$

I_X が X の代表のような存在だ、ということ。

(Th 4.3.2)

残り $m-r$ 個のベクトルs $X \setminus I_X$ を $\{x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_m\}$ とナンバリングし直したとして、これらが

$$x_k = c_1 x_{I_1} + c_2 x_{I_2} + \cdots + c_r x_{I_r} \quad , \quad r+1 \le k \le m$$

のように I_X の元による一次結合で書ける。

Th 4.3.1.（一次結合すると独立度は下がるか同じままだよ）

$U=\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ の一次結合で $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ を作った場合、
（つまり、$v_k = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_mu_m$，$1 \le k \le n$ と書ける場合）

一次独立なベクトルの最大個数 of U $\overset{\text{減少}}{\geq}$ 一次独立なベクトルの最大個数 of V

例．$\underbrace{U=\left\{x_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, x_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, x_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}}_{\text{3つが一次独立.}}$，$V=\left\{y_1=x_1+x_2,\ y_2=x_1+x_2,\ y_3=x_3\right\}$ に対して

一次結合で作った

3つが一次独立. ＞ この2つが一次独立.

独立度が
下がった.

#4-3-3

一次結合も含まれているが、大丈夫.

注：ただし、簡約化の手続きは独立度を変化させない.

だから、実は

簡約化して残った角(カド)の $\boxed{1}$ という成分を持っているベクトル数 ＝ 一次独立なベクトルの最大個数

＝ rank（ベクトルを並べた matrix）

である（Th 4.3.3 ～ 4.3.5 を含む）.

例.（教 p.76 例題 4.3.1）

一次独立な3つのベクトルの一次結合で書けてしまうベクトル

$$
\text{元}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{簡約化}]{\text{（行変形）}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

と判明する.

一次独立なベクトル
（簡約化して、$\boxed{1}$ という成分を持っているベクトル）

よって

$$
\begin{cases} \cdot\ \{a_1, a_2, a_4\} \text{ は一次独立.} \\ \cdot\ a_3 = -a_1 + 2a_2 \\ \cdot\ a_5 = 2a_1 - a_2 + a_4 \end{cases}
$$

と判明する.

Th. 4.3.6：抽象的なベクトルの一次独立性を行列で判断する.

ベクトル空間 V のベクトル, $B = \{u_1, u_2, \cdots u_n\}$ が一次独立であるとして、

V 中のベクトル v_k, $k=1\sim m$ が B の一次結合で書けるとしよう.

注. u_i や v_j は抽象的なベクトルも OK, つまり, $u_1 = x$, $u_2 = x^2-1$, などもアリということに注意しよう.

つまり、$v_k = a_{1k}u_1 + a_{2k}u_2 + \cdots + a_{nk}u_n$, $k=1\sim m$ と書けるということだ.

$$\Leftrightarrow \quad v_k = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}, \quad k=1\sim n$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & a_{22} & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}}^{A}$$

$$\begin{array}{ccc} \| & \| & & \| \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{array}$$

Aは必ず具体的な「行列」の形である.

この時、

$\underbrace{\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}}$ の $\underline{\text{一次関係}}$ は $\underbrace{\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}}$ のそれと同じである.

抽象的なベクトルかも.

一次結合でどういう関係にあるかという意味.

数字で構成された具体的なベクトル.

例. (教 p.79 例題 4.3.2)

Q. $V = \mathbb{R}[x]_3$ のベクトル

$v_1 = 1+x+3x^2,\ v_2 = 1+2x-x^3,\ v_3 = 1+3x-3x^2-2x^3,\ v_4 = -2-4x+x^2-x^3,\ v_5 = -1-4x+7x^2$

の一次関係を調べよ。 ← 多項式の一次関係？そのまま取り組むととても面倒だ…

他の$\mathcal{B}$にしても良い。

A. まず、Vの一次独立なベクトルs $\mathcal{B}$を用意する。明らかに $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ として良いのでそうしよう。

すると、$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ と書ける。

$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$ としよう。

よって Th.4.3.6 により、$v_1 \sim v_5$ を調べる代わりに $a_1 \sim a_5$ を調べれば良い。 ← このおかげで行列の変形だけで計算できる。

これは#4-3-3の例で既に調べていて結果を知っている。それを $v_1 \sim v_5$ の関係ととらえなおすと、

$$\begin{cases} \cdot\ \{v_1, v_2, v_4\} \text{ は一次独立.} \\ \cdot\ v_3 = -v_1 + 2v_2 \\ \cdot\ v_5 = 2v_1 - v_2 + v_4 \end{cases}$$

という結果を得る。