§4.2 一次独立と一次従属 ～ 集合の元を幾つかの代表をもとにして表わす為に重要な概念.

def. 一次結合.

これを使って「独立性」を判定するよ.

V のベクトル v が V のベクトル $u_1, u_2, \cdots, u_n$ の一次結合で書ける

ベクトル空間

$$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad v = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n \quad , \text{ただし } {}^{\forall} c_i \in K.$$

def. 一次独立.

V のベクトル $u_1, u_2, \cdots, u_n$ が一次独立である

$$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \text{「} \mathbb{0} = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n \Leftrightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0 \text{」}$$

どの u_i も, 残りの u_j を使って

$$u_i = \tilde{c}_1 u_1 + \cdots + \tilde{c}_{i-1} u_{i-1} + \tilde{c}_{i+1} u_{i+1} + \cdots + \tilde{c}_n u_n$$

と表わすことはできない.

↓つまり

どの u_i にも代わりの居ない状況.

def. 一次従属 … 一次独立でないこと.

つまり, $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ ではない $c_1, c_2, \cdots, c_n$ で

$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n = \mathbb{0}$ を満たすものが在る.

だから

$u_i = \tilde{c}_1 u_1 + \cdots + \tilde{c}_{i-1} u_{i-1} + \tilde{c}_{i+1} u_{i+1} + \cdots + \tilde{c}_n u_n$ と表わせる u_i が在る. ある u_i には代わりが居て, 不要なのだ.

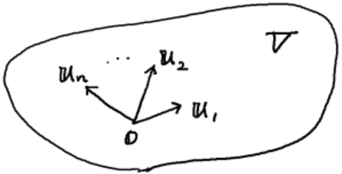
Q. どう役に立つの？

A. 作り出すベクトル空間との関係が違うよ。（下に示すように）一次独立な時の方が何かと便利だよ。

注：$\mathrm{span}\{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \overset{\text{def.}}{=} u_1, \cdots, u_n$ の一次結合全てによる集合。ベクトル空間になっている。

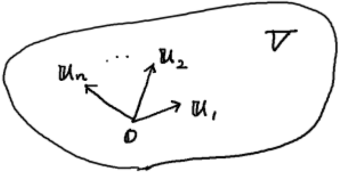
• $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ が一次独立な場合：$V := \mathrm{span}\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ に対して、

1. どれか1つでも u_i を除去して
   $W := \mathrm{span}\{u_1, \cdots, u_{i-1}, u_{i+1}, \cdots, u_n\}$ を考えると
   $W \subsetneq V$。つまり、必ず小さくなってしまい、V を作れない。
2. 任意の $u \in V$ に対し、
   $u = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$ と表わした時、
   $c_1, c_2, \cdots, c_n$ が一意に定まる。
3. $\{u_1, \cdots, u_n\}$ は V の基底である。（2の言い換え）
4. $\dim V = n$.
   （Vの次元）

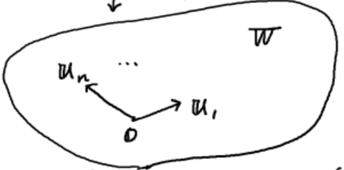


$V = \mathrm{span}\{u_1, \cdots, u_n\}$ に対し、
$u_1, \cdots, u_n$ は多すぎも少なすぎもしないちょうど良いもの
と言える。

• $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ が一次従属な場合：$V := \mathrm{span}\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ に対して、



$V = \mathrm{span}\{u_1, \cdots, u_n\}$ に対し、
$u_1, \cdots, u_n$ は多すぎる。



$\{u_1, \cdots, u_n\}$ からいくつか減らして $\mathrm{span}\{\cdots\} =: W$
を作って、元の V と同じものにできてしまう。

1. どれかうまく1つ u_i を除去して
$W := \mathrm{span}\{u_1, \cdots, u_{i-1}, u_{i+1}, \cdots, u_n\}$ を考えた時、
$W = V$ とできる
つまり、V を作るのに無駄な u_i がある。

2. 任意の $u \in V$ に対し、
$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n$ と表わした時、
$c_1, c_2, \cdots, c_n$ が一意に定まらない。

3. $\{u_1, \cdots, u_n\}$ は V の基底でない（2の言い換え）

4. $\dim V < n$.
（V の次元）

否定形
「無駄」とか「…ない」のような、
良くない情報ばかりなことに注目。

例. $\mathbb{R}^3$ のベクトル $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ は一次独立か否か？

$\mathbb{0} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$ を満たす c_1, c_2, c_3 について調べれば良い。 ← この時 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ しか解がなければ x_1, x_2, x_3 は一次独立。

そして、$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}_{\mathbb{C}}$ として であるので、これは $X\mathbb{C} = \mathbb{0}$ の解 $\mathbb{C}$ を求めてみれば良い。

よって、
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{②}-\text{①}]{\text{③}-\text{②}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{③}-\text{②}]{\text{①}-\text{②}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{②}-\text{①}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{①} \rightleftarrows \text{②}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

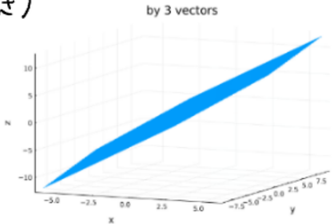
$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - c_3 = 0 \\ c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases} \;\&\; c_3 = \underset{}{p} \ (\text{パラメータ}) \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = p \\ c_2 = -2p \\ c_3 = p \end{cases} \Leftrightarrow \mathbb{C} = p\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ p \in \mathbb{R}$$ となり、

$\mathbb{C} \neq \mathbb{0}$ でも $\mathbb{0} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$ を満たせる。よって x_1, x_2, x_3 は一次従属。

→ 具体的には、例えば $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3)$ として x_2 の代わりを x_1 と x_3 で果たせるので 独立じゃないよね ということなのだ。

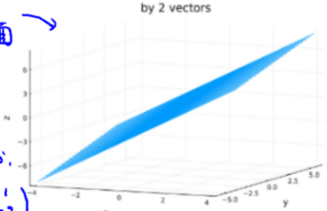
(続き)

#4-2-5



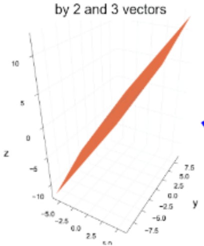
VもWも2次元平面なことが分かる。

前ページの計算から、その平面の法線ベクトル $= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

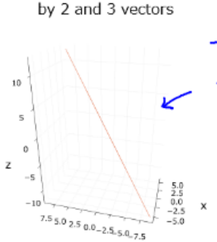


1. $V = \mathrm{span}\{x_1, x_2, x_3\}$ の一部分

2. $W = \mathrm{span}\{x_1, x_3\}$ の一部分



VとWを同時に描くとぴったり重なって、



$V = W$ であることがはっきり分かる。

3. VとWを同時に描いた図

4. 3の図を角度を変えて見たもの。

・教科書 定理 4.2.1 ~ 4.2.5 はほぼ当たり前のことしか言ってないので省略.

↓ただし、

理解の為のポイントは,#4-2-4 にも登場した

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

, u_i の次元は自由.

という表記を自由に行き来できるかにある.

そのつもりで定理 4.2.1 ~ 4.2.5 を読んでみよう.