(おまけ)

・教p.86 問1(5)の解法: 問は、$W := \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1)=0,\ f'(1)=0 \}$ の基底etc. について.

Ans. まず、$\mathbb{R}[x]_3$ の基底をなんでも良いので1つ用意して $f(x)$ を具体的に表現できるようにしよう.

まぁシンプルなのは $B_1 := \{1, x, x^2, x^3\}$ かな. これを採用すると、

この $C_0 \sim C_3$ を座標と呼ぶよ.

$f(x) \in \mathbb{R}[x]_3$ は $f(x) = C_0 \cdot 1 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + C_3 \cdot x^3$ と表わせる.

そしてもう2つの条件が座標 $C_0 \sim C_3$ にどう影響するかを見てみると

$$\begin{cases} f(1) = 0 \iff C_0 + C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ f'(1) = 0 \iff C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 0 \end{cases}$$

となる.

これは $\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と書き直して扱うと分かり易そうなのでそうしよう.

$\sim (1)$

で、(1) $\Leftrightarrow$ 拡大係数行列 $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$ と書いて、#4-4-4 と同じ計算、つまり、簡約化してベクトル空間を分析する。

まず、$\xrightarrow{①-②} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$ と(1回の操作で)簡約化が完了し、

$\boxed{1}$ を受けたところはその式の責任を持つのだ。

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1\cdot C_0 + 0\cdot C_1 - 1\cdot C_2 - 2\cdot C_3 = 0, \\ 0\cdot C_0 + 1\cdot C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 0 \end{cases}$$

となるので、C_0 と C_1 はこの式で決まり、残りの C_2, C_3 は自由パラメータを導入することになる。

よって $\begin{cases} C_0 = C_2 + 2C_3, \\ C_1 = -2C_2 - 3C_3, \\ C_2 = p_1, \text{(パラメータ)} \\ C_3 = p_2 \text{(パラメータ)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + 2p_2 \\ -2p_1 - 3p_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = p_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{e}_1} + p_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{e}_2}$ として と書ける。

よって、座標で見ると基底を $\{\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2\}$ として良いということが分かる。

座標で (c_0, c_1, c_2, c_3) ということはそのベクトルは $c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 x^3$ ということだったので、

ベクトルの基底と座標の関係を明確に意識すると良い.

座標で e_1, e_2 と表わされる2つのベクトルは各々

$$\begin{cases} u_1 = 1 \cdot 1 - 2 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 = 1 - 2x + x^2, \\ u_2 = 2 \cdot 1 - 3 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 = 2 - 3x + x^3 \end{cases}$$

のことを指している.

よって、

W の基底 $= \{ 1 - 2x + x^2, 2 - 3x + x^3 \}$ とすることができる

ということが分かり、同時に、 $\dim W = 2$ ということも分かる. (完).