Daisuke Furihata

Answers for minitest 2.

問1.

$T: V \ni \boldsymbol{u} \mapsto \overset{T(\boldsymbol{u})}{\boldsymbol{v}} \in V$ を座標で表現するのが良い。

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{u}_1 + u_2\boldsymbol{u}_2 + u_3\boldsymbol{u}_3 = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3)\underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{u}\text{の座標}} \text{ の時、}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} = T(\boldsymbol{u}) &= u_1 T(\boldsymbol{u}_1) + u_2 T(\boldsymbol{u}_2) + u_3 T(\boldsymbol{u}_3) \\
&= u_1\boldsymbol{u}_1 + u_2(2\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2) + u_3(4\boldsymbol{u}_1 + 10\boldsymbol{u}_3) \\
&= (u_1 + 2u_2 + 4u_3)\boldsymbol{u}_1 + 2u_2\boldsymbol{u}_2 + 10u_3\boldsymbol{u}_3 \\
&= (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3)\underbrace{\begin{pmatrix} u_1+2u_2+4u_3 \\ 2u_2 \\ 10u_3 \end{pmatrix}}_{T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}\text{の座標}} \quad \text{であるので、}
\end{aligned}$$

$$T(\boldsymbol{u})\text{の座標} = \begin{pmatrix} u_1+2u_2+4u_3 \\ 2u_2 \\ 10u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}\overbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}}^{\boldsymbol{u}\text{の座標}} \text{ より}$$

$$T\text{の表現行列} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} /\!/$$

問2.

問1と同様に

$$\boldsymbol{u} = u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot x + u_3 x^2 = (1\ x\ x^2)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ として.}$$

$$\begin{aligned}
T(\boldsymbol{u}) &= u_1 + 2u_2 + 4u_3 + 2(u_2 + 2u_3 x)x + 3 \cdot 2u_3 \cdot x^2 \\
&= (u_1 + 2u_2 + 4u_3)\cdot 1 + 2u_2 \cdot x + 10u_3 x^2 \\
&= (1\ x\ x^2)\begin{pmatrix} u_1+2u_2+4u_3 \\ 2u_2 \\ 10u_3 \end{pmatrix} \quad \text{で、問1と}\overset{\text{全く}}{\text{同じ}}\text{、つまり.}
\end{aligned}$$

$$T\text{の表現行列} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} /\!/$$

問3.

まず固有多項式を解いて固有値を求める、つまり、

$$0 = \varphi_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & 3 \\ -4 & 6-\lambda & 3 \\ -2 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \overset{2r-3r}{=} \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 3 \\ -4 & 3-\lambda & 3 \\ -2 & -3+\lambda & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{2c+3c}{=} \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 8-\lambda \\ -2 & -3+\lambda & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ -6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\left((\lambda+1)(\lambda-8) + 18\right)$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda \underbrace{-8+18}_{+10}) = -(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-5)$$ より、固有値は 2, 3, 5.

Daisuke Furihata

次に固有ベクトルを求める。

固有値
$\lambda = 2$ の場合：固有ベクトルを u_2 とおくと $Au_2 = 2u_2 \Leftrightarrow (A-2I)u_2 = 0$

であるのでこの式を解く。つまり、

$$0 = (A-2I)u_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -4 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} u_2 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} -3 & 3 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} ①\times(-\tfrac{1}{3}) \\ ②\times(-1) \\ ③\times(-1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{②-4① \\ ③-2①}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{同じ}]{①+②} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = p \leftarrow \text{パラメータ} \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より、}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\leftarrow \text{この定数倍}(\neq 0)\text{は全て OK})$$

$\lambda = 3$ の場合：

$$0 = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -4 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} u_3 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} -4 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{②-4①} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{①+②} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \\ z = p \leftarrow \text{パラメータ} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ より、} u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 5$ の場合：

$$0 = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} u_5 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} -6 & 3 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{②-2① \\ ③-4①}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{同じ}]{①+②} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z = p \leftarrow \text{パラメータ} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ より、} u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって 固有値・〃ベクトル pair としては　解

$$\left(2, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \left(3, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right), \left(5, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ で全て。}//$$

Daisuke Furihata

問4. 問3とプロセスは基本的に同じ.

$$0=\varphi_A(\lambda)=|A-\lambda I| = \begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\-2&4-\lambda&1\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\-2&4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(3-\lambda)\{(\lambda-1)(\lambda-4)+2\} = (3-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4+2) = (3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

より. 固有値. $\lambda = 2, 3, 3$ 重複.

λ=2の場合: $\mathbf{0}=(A-2I)u_2 = \begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}u_2 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&0\\-2&2&1&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\2&-2&-1&0\\0&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{②-2①}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{array}\right)\text{同じ}\xrightarrow{①+②}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x-y=0\\ z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y\\ y=p\ (\text{パラメータ})\\ z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{より}\quad u_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

λ=3の場合: (重複) $\mathbf{0}=(A-3I)u_3 = \begin{pmatrix}-2&1&1\\-2&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}u_3 \Leftrightarrow (-2\ 1\ 1)u_3=0$

$$\Leftrightarrow -2x+y+z=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\\ y=p_1\ (\text{パラメータ})\\ z=p_2\ (\text{〃})\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=p_1\begin{pmatrix}1/2\\1\\0\end{pmatrix}+p_2\begin{pmatrix}1/2\\0\\1\end{pmatrix}$$

より, u_3は 例えば $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ の2つ. など. (←正確には、$\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right)$ の中から 2つの一次独立なベクトルならばOK!)

互いに一次独立

よって, 固有対は $\left(2,\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right), \left(3,\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right), \left(3,\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right)$ //.

問5. これも同様に計算をすすめる.

$$0=\varphi_A(\lambda)=|A-\lambda I| = \begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\-3&5-\lambda&2\\1&-1&2-\lambda\end{vmatrix} \overset{1r+2r}{=} \begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\2-\lambda&5-\lambda&2\\0&-1&2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\overset{2c-1c}{=}\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\0&4-\lambda&1\\0&-1&2-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix}4-\lambda&1\\-1&2-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)\{(\lambda-4)(\lambda-2)+1\}$$

$$=(2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8+1) = (2-\lambda)(\lambda-3)^2$$ より, 固有値 $\lambda = 2, 3, 3$ 重複.

Daisuke Furihata

次に固有ベクトルを求める。

$\lambda=2$の場合: $\mathbf{0}=(A-2I)u_2=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-3&3&2\\1&-1&0\end{pmatrix}u_2 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&0\\-3&3&2&0\\1&-1&0&0\end{array}\right)$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\3&-3&-2&0\\1&-1&0&0\end{array}\right) \xrightarrow[③-①]{②-3①} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{array}\right) \xrightarrow{①+②} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$ 同じ

$\Leftrightarrow \begin{cases}x-y=0\\ z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y\\ y=p\ (\text{パラメータ})\\ z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ より $u_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

$\lambda=3$(重複)の場合: $\mathbf{0}=(A-3I)u_3=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-3&2&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}u_3 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&0\\-3&2&2&0\\1&-1&-1&0\end{array}\right)$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\2&-1&-1&0\\3&-2&-2&0\end{array}\right) \xrightarrow[③-3①]{②-2①} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\end{array}\right) \xrightarrow{①+②} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&1&0\end{array}\right)$ 同じ

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y+z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=-z\\ z=p\ (\text{パラメータ})\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ より $u_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ のみ.

重複固有値に固有ベクトルが1つしかない!

よって固有対は $\left(2,\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right),\left(3,\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ の2つのみ. //

問6. まず固有多項式を求め,固有値も求める.

$0=\varphi_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}9/2-\lambda&-1/2\\-1/2&9/2-\lambda\end{vmatrix}=\frac14(9-2\lambda)^2-\frac14$

$=\frac14(4\lambda^2-36\lambda+81-1)=\frac14(4\lambda^2-36\lambda+80)=\lambda^2-9\lambda+20=(\lambda-4)(\lambda-5)$

より,固有値 $\lambda=4,5$.

ケーリー・ハミルトンにより, $\varphi_A(A)=A^2-9A+20I=O$ (行列)

そして, $A^{100}=\underbrace{P_{98}(A)}_{Aの98次式}\cdot\underbrace{\varphi_A(A)}_{=O\text{ by ケーリー・ハミルトン}}+C_1A+C_0I$ であるが,単なるスカラー x に対しても

$x^{100}=P_{98}(x)\varphi_A(x)+C_1x+C_0$ であり, $x=4$ or 5 の時 $\varphi_A(x)=0$ である為,

$\begin{cases}4^{100}=C_1 4+C_0\\ 5^{100}=C_1 5+C_0\end{cases}$ となる. よってこれを

$\begin{pmatrix}1&4\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_0\\C_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4^{100}\\5^{100}\end{pmatrix}$ として $\begin{pmatrix}C_0\\C_1\end{pmatrix}$ を求める. 以降面倒なので

$a_4:=4^{100}$, $a_5:=5^{100}$ と書いて.

$\left(\begin{array}{cc|c}1&4&a_4\\1&5&a_5\end{array}\right)\xrightarrow{②-①}\left(\begin{array}{cc|c}1&4&a_4\\0&1&a_5-a_4\end{array}\right)\xrightarrow{①-4②}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&5a_4-4a_5\\0&1&-a_4+a_5\end{array}\right)$ $=\begin{pmatrix}C_0\\C_1\end{pmatrix}$.

よって、

$$A^{100} = c_1 A + c_0 I$$
$$= (-a_4 + a_5)A + (5a_4 - 4a_5)I$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9(-a_4+a_5) & a_4 - a_5 \\ a_4 - a_5 & 9(-a_4+a_5) \end{pmatrix} + (5a_4 - 4a_5)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_4 + \frac{1}{2}a_5 & \frac{1}{2}a_4 - \frac{1}{2}a_5 \\ \frac{1}{2}a_4 - \frac{1}{2}a_5 & \frac{1}{2}a_4 + \frac{1}{2}a_5 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}a_4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}a_5\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 4^{100}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}5^{100}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \;//$$

問7. $\overset{n\times n}{A}$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ に対して $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, $\mathrm{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ であるので、

問の情報は $\lambda_1 = 3$, $\underbrace{\lambda_2, \lambda_3}_{\text{未知}}$ に対して

$\begin{cases} 3\lambda_2\lambda_3 = 90, \\ 3 + \lambda_2 + \lambda_3 = 14 \end{cases}$ を示している。よって $\begin{cases} \lambda_2\lambda_3 = 30 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 11 \end{cases}$ であるので

$\lambda_2, \lambda_3 = 5, 6$ であるコトが容易に分かる。

問8. 問4の解より、$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とすると $AP = P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる。

そして、$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2-1) = 2 \neq 0$ より Pは確かに正則である。

また、$AP \overset{\text{実際に計算した}}{=} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

問9. 問3の解より、$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると $AP = P\overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}^{D\text{として}}$, 即ち

$A = PDP^{-1}$. よって $\exp(A) = P\underbrace{\begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^3 & 0 \\ 0 & 0 & e^5 \end{pmatrix}}_{\mathcal{E}\text{として}}P^{-1}$.

$\Leftrightarrow \exp(A)\cdot P = P\mathcal{E}$

両辺の転置、

$\Leftrightarrow P^T \underbrace{\exp(A)^T}_{\text{未知}} = \mathcal{E}^T P^T$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\exp(A)^T}_{B\text{として}} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^3 & 0 \\ 0 & 0 & e^5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^3 & -e^3 \\ e^5 & e^5 & e^5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{拡大係数行列}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & e^3 & -e^3 \\ 1 & 1 & 1 & e^5 & e^5 & e^5 \end{array}\right) \xrightarrow{③-①} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & e^3 & -e^3 \\ 0 & 0 & 1 & e^5-e^2 & e^5-e^2 & e^5 \end{array}\right) \to \cdots$$

Daisuke Furihata

②+③

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e^5-e^2 & e^3+e^5-e^2 & e^5-e^3 \\ 0 & 0 & 1 & e^5-e^2 & e^5-e^2 & e^5 \end{array}\right)$$

①-②

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2e^2-e^5 & 2e^2-e^3-e^5 & e^3-e^5 \\ 0 & 1 & 0 & e^5-e^2 & e^3+e^5-e^2 & e^5-e^3 \\ 0 & 0 & 1 & e^5-e^2 & e^5-e^2 & e^5 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxx}}_{B \,=\, \exp(A)^T}.$$

Computerで検算済み.

よって $\exp(A) = e^2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_2} + e^3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_3} + e^5 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A_5 \text{とおく}}$ //.

問10. まず、
$\mathbb{u}(t) = \exp(tA)\,\mathbb{u}(0)$ が解である.
(実際、上の式をtで微分すると $\frac{d}{dt}\mathbb{u}(t) = A\exp(tA)\,\mathbb{u}(0) = A\,\mathbb{u}(t)$
となり、初期条件も満たす.)

よって 問9の解を利用して

$$\mathbb{u}(t) = (e^{2t}A_2 + e^{3t}A_3 + e^{5t}A_5)\,\mathbb{u}(0)$$

$$= e^{2t}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{5t}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad //.$$