Mini Test 02 (線形代数学 II)

実施日 2023.12.12

問 1. 線形作用素 $T : V \to V$ が 3 次元ベクトル空間 V の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ に対して

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{u}_1) &= \boldsymbol{u}_1, \\ T(\boldsymbol{u}_2) &= 2\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2, \\ T(\boldsymbol{u}_3) &= 4\boldsymbol{u}_1 + 10\boldsymbol{u}_3 \end{cases}$$

の関係にあるとき，T のこの基底に対する表現行列を求めよ．

問 2. $V = \boldsymbol{R}_2[x]$ に対して線形作用素 $T : V \to V$ が $f(x) \in V$ に対し

$$T(f) = f(2) + 2f'(x)x + 3f''(x)x^2$$

であるとする．V の基底 $\{1, x, x^2\}$ に対して T の表現行列を求めよ．

問 3. 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 3 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ に対し，固有値をすべて求め，かつ, 固有値それぞれに対応する固有ベクトルをすべて求めよ．

問 4. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対し，固有値をすべて求め，かつ, 固有値それぞれに対応する固有ベクトルをすべて求めよ．

問 5. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ に対し，固有値をすべて求め，かつ, 固有値それぞれに対応する固有ベクトルをすべて求めよ．

問 6. 行列 $A = \begin{pmatrix} 9/2 & -1/2 \\ -1/2 & 9/2 \end{pmatrix}$ に対し，ケーリー・ハミルトンの定理を用いて A^{100} を求めよ．

問 7. 3×3 行列 A に対し，その固有値の 1 つが 3 であることと

$$\begin{cases} \det(A) &= 90, \\ \mathrm{Tr}(A) &= 14 \end{cases}$$

が判明しているとき，残りの固有値 2 つを求めよ．

問 8. 問 4 の行列 A を適切な正則行列 P を用いて $D = P^{-1}AP$ として対角化することを考える．このときの P を求めよ．また，P が確かに正則であることを確認せよ．また，AP を計算して求めよ．

問 9. 問 3 の行列 A に対し，対角化を用いて $\exp(A)$ を求めよ．

問 10. 独立変数が t である常微分方程式 $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{u}(t) = A\boldsymbol{u}(t)$ を考える．ただし，A は問 3 の行列 A であり，関数 $\boldsymbol{u}(t)$ は 3 つの要素を持つベクトル値関数である．

$\boldsymbol{u}(t)$ の初期値が $\boldsymbol{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ のとき，$t > 0$ での $\boldsymbol{u}(t)$ を求めよ．

以上．

Mini Test 02 (線形代数学 II)

実施日 2023.12.12

問 1. 線形作用素 $T: V \to V$ が 3 次元ベクトル空間 V の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ に対して

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{u}_1) &= \boldsymbol{u}_1, \\ T(\boldsymbol{u}_2) &= 2\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2, \\ T(\boldsymbol{u}_3) &= 4\boldsymbol{u}_1 + 10\boldsymbol{u}_3 \end{cases}$$

の関係にあるとき，T のこの基底に対する表現行列を求めよ．

問 2. $V = \boldsymbol{R}_2[x]$ に対して線形作用素 $T: V \to V$ が $f(x) \in V$ に対し

$$T(f) = f(2) + 2f'(x)x + 3f''(x)x^2$$

であるとする．V の基底 $\{1, x, x^2\}$ に対して T の表現行列を求めよ．

問 3. 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 3 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ に対し，固有値をすべて求め，かつ, 固有値それぞれに対応する固有ベクトルをすべて求めよ．

問 4. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対し，固有値をすべて求め，かつ, 固有値それぞれに対応する固有ベクトルをすべて求めよ．

問 5. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ に対し，固有値をすべて求め，かつ, 固有値それぞれに対応する固有ベクトルをすべて求めよ．

問 6. 行列 $A = \begin{pmatrix} 9/2 & -1/2 \\ -1/2 & 9/2 \end{pmatrix}$ に対し，ケーリー・ハミルトンの定理を用いて A^{100} を求めよ．

問 7. 3×3 行列 A に対し，その固有値の 1 つが 3 であることと

$$\begin{cases} \det(A) &= 90, \\ \mathrm{Tr}(A) &= 14 \end{cases}$$

が判明しているとき，残りの固有値 2 つを求めよ．

問 8. 問 4 の行列 A を適切な正則行列 P を用いて $D = P^{-1}AP$ として対角化することを考える．このときの P を求めよ．また，P が確かに正則であることを確認せよ．また，AP を計算して求めよ．

問 9. 問 3 の行列 A に対し，対角化を用いて $\exp(A)$ を求めよ．

問 10. 独立変数が t である常微分方程式 $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{u}(t) = A\boldsymbol{u}(t)$ を考える．ただし，A は問 3 の行列 A であり，関数 $\boldsymbol{u}(t)$ は 3 つの要素を持つベクトル値関数である．

$\boldsymbol{u}(t)$ の初期値が $\boldsymbol{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ のとき，$t > 0$ での $\boldsymbol{u}(t)$ を求めよ．

以上．