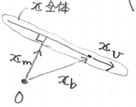
Daisuke Furihata

Answer of minitest 1

問1.

最短ベクトルを $x_m = \overbrace{\begin{pmatrix}-3\\-9\\0\end{pmatrix}}^{x_b} + p_m \overbrace{\begin{pmatrix}-6\\-3\\1\end{pmatrix}}^{x_v}$ とすると、



左の図からも分かるように $x_m \perp x_v$.

$$\Leftrightarrow (x_b + p_m x_v)\cdot x_v = 0$$
$$= x_b \cdot x_v + p_m x_v \cdot x_v$$
$$= (18+27) + p_m(36+9+1)$$
$$= 45 + p_m \cdot 46$$

$$\Leftrightarrow p_m = -\frac{45}{46} \quad /\!/$$

この時、$x_m = x_b - \frac{45}{46}x_v = \begin{pmatrix}-3\\-9\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{46}\begin{pmatrix}45\cdot 6\\45\cdot 3\\-45\end{pmatrix} = \frac{1}{46}\begin{pmatrix}-3\cdot 46+270\\-9\cdot 46+135\\-45\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{46}\begin{pmatrix}132\\-279\\-45\end{pmatrix}$ より、$\|x_m\| = \frac{1}{46}\sqrt{132^2+279^2+45^2} = \frac{1}{46}\sqrt{97290}$

問2.

拡大係数行列を用いて解く。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & 27 & 9\\ -3 & 2 & -12 & -9\\ 27 & -12 & 126 & 27\end{array}\right) \xrightarrow[\text{③}/3]{\text{①}/3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 9 & 3\\ -3 & 2 & -12 & -9\\ 9 & -4 & 42 & 9\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{③}+3\text{②}]{\text{①}+\text{②}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & -6\\ -3 & 2 & -12 & -9\\ 0 & 2 & 6 & -18\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{③}/2]{\text{①}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 6\\ -3 & 2 & -12 & -9\\ 0 & 1 & 3 & -9\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{②}+3\text{①}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 6\\ 0 & -1 & -3 & 9\\ 0 & 1 & 3 & -9\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{②と③は同じ}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 6\\ 0 & 1 & 3 & -9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{①}+\text{②}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & -3\\ 0 & 1 & 3 & -9\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+0+6z=-3\\ y+3z=-9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3-6z\\ y=-9-3z\\ z=p\ (\text{パラメータ})\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{pmatrix}-3\\-9\\0\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}-6\\-3\\1\end{pmatrix}, \quad p = \text{パラメータ}. \quad /\!/$$

そしてこの x の $\underbrace{\text{最短}}_{\text{(問1により)}}$ のものは $x_{min} = \frac{1}{46}\begin{pmatrix}132\\-279\\-45\end{pmatrix}$ //.

Daisuke Furihata

問3.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 9 & 5 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{②+①} \left(\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \end{array}\right)$$ 矛盾、よって解なし.

よって最小二乗解を求める. 最小二乗解 x に対し

$A^TAx = A^Tb$ であるので、

$$A^TA = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 27 \\ -3 & 2 & -12 \\ 27 & -12 & 126 \end{pmatrix}, \quad A^Tb = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 27 \end{pmatrix}$$ より、問2の答がそのまま答 //.

問4

$x \in W$ に対し、$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるので、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{②-①} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{②/(-5)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{①-2②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+0-z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=z \\ z=p \text{ (パラメータ)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = p\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{v\text{とし}}, \quad p\text{: パラメータ}$$ より、

$W = \{ pv \mid p \in \mathbb{R} \}$. このWがTh4.1.1の3条件を満たすことは容易に分かるので、Wは $\mathbb{R}^3$ の部分空間 //

i) $p=0$ の時 $pv = 0$ より $0 \in W$.

ii) $v_1, v_2 \in W$ の時、$\underbrace{v_1 = p_1 v,\ v_2 = p_2 v}_{\exists p_1, p_2 \text{によって}}$ と書けるため. $v_1 + v_2 = p_1 v + p_2 v = (p_1+p_2)v \in W$.

iii) $v_1 \in W$ の時、$v_1 = p_1 v$ と書ける.
よって $cv_1 = cp_1 v = (cp_1)v \in W$. //

問5.

$f(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ とおくと、

$$\begin{cases} f'(4) = 3c_3 \cdot 16 + 2c_2 \cdot 4 + c_1 = 48c_3 + 8c_2 + c_1 = 0, \\ f(2) = 8c_3 + 4c_2 + 2c_1 + c_0 = 0. \end{cases}$$

よって

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 8 & 48 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これを簡約化すると $\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 48 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{①-2②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -12 & -88 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 48 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_0 + 0 - 12c_2 - 88c_3 = 0 \\ c_1 + 8c_2 + 48c_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = 12c_2 + 88c_3 \\ c_1 = -8c_2 - 48c_3 \\ c_2 = p_1 \text{ (パラメータ)} \\ c_3 = p_2 \text{ (〃)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = p_1\begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_2\begin{pmatrix} 88 \\ -48 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daisuke Furihata

よって. $f \in W$ は $f(x) = p_1 \underbrace{(12 - 8x + x^2)}_{e_1} + p_2 \underbrace{(88 - 48x + x^3)}_{e_2}$ と書ける。 とすると

つまり、
$f = p_1 e_1 + p_2 e_2$. と書ける. よって W が部分空間なのは Th 4.1.1 より
下の3つを示すことで確かめられる

i) $p_1 = p_2 = 0$ とすると $f = 0 \in W$.

ii) $f_1, f_2 \in W$ は、$f_1 = x_1 e_1 + y_1 e_2$, $f_2 = x_2 e_1 + y_2 e_2$ と書けるので.
$f_1 + f_2 = (x_1 + x_2) e_1 + (y_1 + y_2) e_2 \in W$.

iii) $f = p_1 e_1 + p_2 e_2$ に対し $cf = (cp_1) e_1 + (cp_2) e_2 \in W$. //

問6. 一次独立な (v_1, v_2, v_3) は $\mathrm{span}(v_1, v_2, v_3) =: W$ の基底に出来る.
すると
与式は W での v_1, v_2, v_3 の座標が各々 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ であることを意味するので、

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ を解けば良い. ($\Leftrightarrow$ $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = \mathbb{0}$ の c_1, c_2, c_3 を求めるコト)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[③+3②]{①-2②} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sort}]{①/3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[③+2②]{①+②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{③/7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[②+③]{①-③} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = \mathbb{0} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となり. (v_1, v_2, v_3) は一次独立.

問7. $\mathbb{R}[x]_2$ の基底を $(1, x, x^2)$ としたとすると、与式は $f_1 \sim f_5$ の座標が各々
$a_1 \sim a_5$ とおく. → $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ であることを意味する. よってこれらの関係を調べる.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[③-2①]{②-①} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[③+2②]{①-②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②+2③} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ (a_1, a_2, a_4) が一次独立で
$a_3 = -a_1 + 2a_2$, $a_5 = -6a_1 + 41a_2 + 18a_4$.

$\Leftrightarrow$
- 一次独立なベクトルは最大で 3つ. //
- その3つは f_1, f_2, f_4. //
- 残りは. $f_3 = -f_1 + 2f_2$, $f_5 = -6f_1 + 41f_2 + 18f_4$ //

Daisuke Furihata

問8. 問7と同様に計算すれば良い。$(1, x, x^2, x^3)$ を基底として、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{④}\times(-1)]{\text{②}-\text{①},\ \text{③}-2\text{①}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{④}-\text{②}]{\text{①}-\text{②},\ \text{③}+2\text{②}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 18 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sort}]{\text{④}\times(-1/5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{①}+\text{③},\ \text{②}-2\text{③}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3/5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -4/5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{③}+(3/5)\text{④}]{\text{①}+(3/5)\text{④},\ \text{②}+(4/5)\text{④}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 29/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 87/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 59/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ $(a_1 \sim a_4)$ が一次独立で $a_5 = \frac{29}{5}a_1 + \frac{87}{5}a_2 + \frac{59}{5}a_3 + 18a_4$.

$\Leftrightarrow$ $(f_1 \sim f_4)$ 〃 , $f_5 = \frac{29}{5}f_1 + \frac{87}{5}f_2 + \frac{59}{5}f_3 + 18f_4$

Wは4次元で Wの基底として (f_1, f_2, f_3, f_4) と出来る。//

問9. $Ax = 0$ を解くと、

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{問7と同じ}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 41 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 18 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 0 - x_3 + 0 - 6x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 0 + 41x_5 = 0 \\ x_4 + 18x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 6x_5 \\ x_2 = -2x_3 - 41x_5 \\ x_3 = p_1 \ (\text{パラメータ}) \\ x_4 = -18x_5 \\ x_5 = p_2 \ (\text{パラメータ}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = p_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} + p_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ -41 \\ 0 \\ -18 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_2}$$

となり、$\mathrm{Ker}(A) = \{ p_1 e_1 + p_2 e_2 \mid p_1, p_2 \in \mathbb{R} \}$ //.

そして $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2$ //.

問10. $n = 5$ で 問9より $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2$ であるので、

$\mathrm{rank}\,A = n - \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 5 - 2 = 3$ //.