Mini Test 01 (線形代数学 II)

実施日 2023.11.07

問 1． パラメータ $p \in \boldsymbol{R}$ を含むベクトル $\boldsymbol{x}(p) = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し，その長さ (ユークリッドノルムのこと) を最も短くするときの p を求めよ．また，その時の $\boldsymbol{x}(p)$ の長さも求めよ．

問 2． 行列 $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 27 \\ -3 & 2 & -12 \\ 27 & -12 & 126 \end{pmatrix}$, ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 27 \end{pmatrix}$ に対し、連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

ただし，解が存在しない場合は最小自乗解を求めよ．また，解に任意パラメータ (複数もあり) が含まれる場合はそれらについてもきちんと記述せよ．なお，どのような場合でも，解がパラメータを含む場合はその中でベクトルの長さがもっとも短い解を追加で答えよ．

問 3． 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 9 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ に対し、連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

ただし，解が存在しない場合は最小自乗解を求めよ．また，解に任意パラメータ (複数もあり) が含まれる場合はそれらについてもきちんと記述せよ．なお，どのような場合でも，解がパラメータを含む場合はその中でベクトルの長さがもっとも短い解を追加で答えよ．

問 4． 集合 $W = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0\}$ (ただし x_1, x_2, x_3 はそれぞれ $\boldsymbol{x}$ の第 1 成分，第 2 成分，第 3 成分である) が $V = \boldsymbol{R}^3$ の部分空間か否かを理由付きで答えよ．

問 5． 集合 $W = \{f(x) \in \boldsymbol{R}[x]_3 \mid f'(4) = 0, f(2) = 0\}$ (ただし $\boldsymbol{R}[x]_3$ は x の 3 次以下の多項式である) が $V = \boldsymbol{R}[x]_3$ の部分空間か否かを理由付きで答えよ．

(裏面に続きあり)

問 6． 一次独立なベクトルの組 $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ に対し，

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 &= 2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - 3\boldsymbol{u}_3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3, \\ \boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3 \end{cases}$$

という関係にあるベクトルの組 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ が一次独立かどうか理由付きで答えよ．

問 7． x の二次以下の多項式 $\boldsymbol{R}[x]_2$ 中の多項式

$$\begin{cases} f_1 &= 1 + x + 2x^2, \\ f_2 &= 1 + 2x, \\ f_3 &= 1 + 3x - 2x^2, \\ f_4 &= -2 - 4x + x^2, \\ f_5 &= -1 + 4x + 6x^2 \end{cases}$$

の一次関係を調べよ．具体的には以下のように答えれば良い．

- この中で一次独立なベクトルの最大個数 r を求めてこれを解答し，
- 前の方から，r 個の一次独立なベクトルを挙げ，
- 残りのベクトルを，上で求めた r 個の一次独立なベクトルの一次結合で表わす．

問 8． x の三次以下の多項式 $\boldsymbol{R}[x]_3$ 中の多項式

$$\begin{cases} f_1 &= 1 + x + 2x^2, \\ f_2 &= 1 + 2x - x^3, \\ f_3 &= 1 + 3x - 2x^2 + 3x^3, \\ f_4 &= -2 - 4x + x^2 - x^3, \\ f_5 &= -1 + 4x + 6x^2 \end{cases}$$

で張られる空間 $W = \mathrm{span}\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ の次元を答えよ．また，$f_1, \cdots, f_5$ の組み合わせで W の基底を作れ．

問 9． 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ に対し、$\ker(A) = \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^5 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\}$ を求めよ．
また，$\ker(A)$ の次元 $\dim(\ker(A))$ を答えよ．

問 10． $m \times n$ 行列 A に対し，

$$\text{次元定理:} \quad n = \mathrm{rank}(A) + \dim(\ker(A))$$

を用いて問 9の行列 A の $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ．

以上．