問1. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に対して、拡大係数行列 $\tilde{A} = (A \,\vdots\, \boldsymbol{b})$ を作って、行操作をして $(I \,\vdots\, \boldsymbol{x})$ に変形するコトを試みる.（← 掃き出し法に相当する）

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 37 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 46 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 60 \\ 4 & 5 & 6 & 8 & 11 & 76 \\ 5 & 6 & 8 & 11 & 15 & 102 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{⑤-④ \\ ④-③ \\ ③-② \\ ②-①}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 37 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 14 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 16 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{③-② \\ ④-③ \\ ⑤-④ \\ ①-②}]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 28 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[(*)-c③]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

← 便利!

$$\xrightarrow[(*)-c④]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 17 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[(*)-c⑤]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(*)-c①]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Sort}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

となり、$(I \,\vdots\, \boldsymbol{x})$ の形に到達したので、

$$\text{解 } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad //.$$

問2. 同様にやってみる.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 9 & 10 & 11 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{③-3② \\ ②-3①}]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -3 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

であるが、この第2式と第3式は矛盾する.

よって $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に何を代入しても上の式は成立しない.

つまり、解は無い. //

問3. $A^TA = \begin{pmatrix} 91 & 104 & 117 \\ 104 & 120 & 136 \\ 117 & 136 & 155 \end{pmatrix}$, $A^Tb = \begin{pmatrix} 34 \\ 40 \\ 46 \end{pmatrix}$ とする.

あとは同様にやってみる.

$$\widetilde{A^TA} = \left(\begin{array}{ccc:c} 91 & 104 & 117 & 34 \\ 104 & 120 & 136 & 40 \\ 117 & 136 & 155 & 46 \end{array}\right) \xrightarrow[②-①]{③-②} \begin{pmatrix} 91 & 104 & 117 & 34 \\ 13 & 16 & 19 & 6 \\ 13 & 16 & 19 & 6 \end{pmatrix}$$

上とダブルので不要 (情報はない)

$$\xrightarrow{①-7②} \begin{pmatrix} 0 & -8 & -16 & -8 \\ 13 & 16 & 19 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{①/-8} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 13 & 16 & 19 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②-16①} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 13 & 0 & -13 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{②/13} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -10/13 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{sort}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & -10/13 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10/13 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = -10/13 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z - 10/13, \\ y = -2z + 1 \end{cases} \quad \cdots (*)$$

変数が3つ (x, y, z) で、$(*)$ には式は2つしか無い.

よって変数を1つ「自由」にすると、

決めるべき変数が2つ & 式が2つ

になってちょうど良い.

$(*)$ を見ると $z = p$ (自由パラメータ) とすると簡単で、

数字ならなんでも良い.

$$\begin{cases} x = p - 10/13 \\ y = -2p + 1 \\ z = p \end{cases} = \begin{pmatrix} -10/13 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と解が求まる. //