In [1]:
```julia
using LinearAlgebra
```

In [2]:
```julia
using SymPy
@vars p
```

Out[2]:
```
(p,)
```

Question 1

In [3]:
```julia
A = [ 1.0 2 3 4 5
2 3 4 5 6
3 4 5 6 8
4 5 6 8 11
5 6 8 11 15 ]
```

Out[3]:
```
5×5 Matrix{Float64}:
 1.0  2.0  3.0   4.0   5.0
 2.0  3.0  4.0   5.0   6.0
 3.0  4.0  5.0   6.0   8.0
 4.0  5.0  6.0   8.0  11.0
 5.0  6.0  8.0  11.0  15.0
```

In [4]:
```julia
b = [37.0, 46, 60, 76, 102]
```

Out[4]:
```
5-element Vector{Float64}:
  37.0
  46.0
  60.0
  76.0
 102.0
```

$Ax = b$ を解かせる.

In [5]:
```julia
x = A \ b
```

Out[5]:
```
5-element Vector{Float64}:
 -1.9999999999999922
  0.9999999999999745
  8.000000000000023
 -3.0000000000000093
  5.000000000000002
```

Question 2

In [6]:
```julia
A = [ 1.0 2 3
3 4 5
9 10 11 ]
```

Out[6]:
```
3×3 Matrix{Float64}:
 1.0   2.0   3.0
 3.0   4.0   5.0
 9.0  10.0  11.0
```

In [7]:
```julia
b = [1.0, 2, 3]
```

Out[7]:
```
3-element Vector{Float64}:
 1.0
 2.0
 3.0
```

$Ax = b$ を下記のように解かせてみるが...

In [8]:
```julia
x = A \ b
```

```
SingularException(3)

Stacktrace:
 [1] checknonsingular
   @ c:\julia\Julia-1.9.3\share\julia\stdlib\v1.9\LinearAlgebra\src\factorization.
jl:19 [inlined]
 [2] checknonsingular
   @ c:\julia\Julia-1.9.3\share\julia\stdlib\v1.9\LinearAlgebra\src\factorization.
jl:22 [inlined]
 [3] #lu!#170
   @ c:\julia\Julia-1.9.3\share\julia\stdlib\v1.9\LinearAlgebra\src\lu.jl:82 [inli
ned]
 [4] lu!
   @ c:\julia\Julia-1.9.3\share\julia\stdlib\v1.9\LinearAlgebra\src\lu.jl:80 [inli
ned]
 [5] #lu#176
   @ c:\julia\Julia-1.9.3\share\julia\stdlib\v1.9\LinearAlgebra\src\lu.jl:299 [inl
ined]
 [6] lu (repeats 2 times)
   @ c:\julia\Julia-1.9.3\share\julia\stdlib\v1.9\LinearAlgebra\src\lu.jl:298 [inl
ined]
 [7] \(A::Matrix{Float64}, B::Vector{Float64})
   @ LinearAlgebra c:\julia\Julia-1.9.3\share\julia\stdlib\v1.9\LinearAlgebra\src\
generic.jl:1115
 [8] top-level scope
   @ In[8]:1
```

エラーが出る．解が無い可能性が出てきた．

それを確認するため，$\det(A)$ を計算して確かめる．この値が 0 ならば A は正則ではなく，問題 $Ax = b$ には解がなくても不思議ではない．

In [9]:
```julia
det(A)
```

Out[9]:
```
0.0
```

ただし，A が非正則行列でも連立一次方程式に解がある場合がある．それは A の拡大係数行列 $\tilde{A}$ と A の rank が変わらない場合だ．そこでそうなっていないかも確認する．

In [10]:
```julia
rank(A)
```

Out[10]:
```
2
```

In [11]:
```julia
tA = hcat(A, b)
```

Out[11]:
```
3×4 Matrix{Float64}:
 1.0   2.0   3.0  1.0
 3.0   4.0   5.0  2.0
 9.0  10.0  11.0  3.0
```

In [12]:
```
rank(tA)
```

Out[12]:
```
3
```

拡大係数行列の rank = 3 で，もとの行列の rank = 2 であるので，この連立一次方程式には確かに「解がない」ことがはっきりした．

Question 3

In [13]:
```
B = A' * A
```

Out[13]:
```
3×3 Matrix{Float64}:
  91.0  104.0  117.0
 104.0  120.0  136.0
 117.0  136.0  155.0
```

In [14]:
```
ab = A' * b
```

Out[14]:
```
3-element Vector{Float64}:
 34.0
 40.0
 46.0
```

機械的に解かせてみると，次のようになり，エラーとなる．

一見，この問題にも解がないように思うかもしれないが...

In [15]:
```
x = B \ ab
```

```
SingularException(3)

Stacktrace:
 [1] checknonsingular
   @ c:\julia\Julia-1.9.3\share\julia\stdlib\v1.9\LinearAlgebra\src\factorization.jl:19 [inlined]
 [2] checknonsingular
   @ c:\julia\Julia-1.9.3\share\julia\stdlib\v1.9\LinearAlgebra\src\factorization.jl:22 [inlined]
 [3] #lu!#170
   @ c:\julia\Julia-1.9.3\share\julia\stdlib\v1.9\LinearAlgebra\src\lu.jl:82 [inlined]
 [4] lu!
   @ c:\julia\Julia-1.9.3\share\julia\stdlib\v1.9\LinearAlgebra\src\lu.jl:80 [inlined]
 [5] #lu#176
   @ c:\julia\Julia-1.9.3\share\julia\stdlib\v1.9\LinearAlgebra\src\lu.jl:299 [inlined]
 [6] lu (repeats 2 times)
   @ c:\julia\Julia-1.9.3\share\julia\stdlib\v1.9\LinearAlgebra\src\lu.jl:298 [inlined]
 [7] \(A::Matrix{Float64}, B::Vector{Float64})
   @ LinearAlgebra c:\julia\Julia-1.9.3\share\julia\stdlib\v1.9\LinearAlgebra\src\generic.jl:1115
 [8] top-level scope
   @ In[15]:1
```

しかし実は解はある(実は正規方程式は必ず解を持つのだ).

つまり，$\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(\tilde{B})$ となっているのがこの問題なのだ.
(ただし $B = A^T A$, $\tilde{B}$ は B と $A^T b$ から作られる拡大係数行列).

それを先に確かめよう.

In [16]:
```
rank( B )
```

Out[16]:
```
2
```

In [17]:
```
tB = hcat( B, ab )
```

Out[17]:
```
3×4 Matrix{Float64}:
  91.0  104.0  117.0  34.0
 104.0  120.0  136.0  40.0
 117.0  136.0  155.0  46.0
```

In [18]:
```
rank( tB )
```

Out[18]:
```
2
```

というわけでこの問題では $\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(\tilde{B})$ となり，B が非正則行列だけれども解がある，という場合になっている.

実際解いてみると(面倒なので手で解いた)下記のようになる．ただし，$p \in R$ は自由なパラメータだ.

In [19]:
```
x = [ -10/13, 1.0, 0 ] + p * [ 1, -2, 1 ]
```

Out[19]:

$$\begin{bmatrix} p - 0.7692307692307690 \\ 1.0 - 2p \\ p \end{bmatrix}$$

$A^T A x - A^T b$ の x にこのベクトルを代入して，確かにゼロベクトルになるか確認してみる.

In [20]:
```
B * x - ab
```

Out[20]:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

これでこの x が確かに解だということが確かめられた.