§6.2 正規直交基底と直交行列

def. 正規直交基底 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ とは、$\left\{\begin{array}{l} ① 正規性: \|^\forall u_i\| = 1, \\ ② 直交性: (u_i, u_j) = 0 \text{ if } i \neq j \end{array}\right\}$ の ①と②を満たす基底のコト。

実は全て等価。

ディラックのデルタ $\delta_{ij} := \begin{cases} 1 : i=j, \\ 0 : i \neq j \end{cases}$

def. $\overset{n\times n 行列}{A}$ が直交行列である $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ 以下の1~3のいずれかを満たす。

1. $A^TA = AA^T = I$
2. $A = (a_1\, a_2 \cdots a_n)$, もしくは $A^T = (a_1\, a_2 \cdots a_n)$ とすると $(a_i, a_j) = \delta_{ij}$.
3. 正規直交基底 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ に対し、これを並べて $(a_1 \cdots a_n)$ とするとこれが A もしくは A^T に一致する。

正規性が不要なら少し違うバージョンも作れるリ゛.

Gram-Schmidtの直交化 ~ 一次独立なベクトルから正規直交なベクトルを作る方法.

$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \mapsto \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ とする場合の手順は以下の通り.

$$e_1 := n(a_1), \quad \text{ただし, } n(x) := x/\|x\|.$$

$$e_2 := n\left(a_2 - (e_1, a_2)e_1\right),$$

$$e_3 := n\left(a_3 - (e_1, a_3)e_1 - (e_2, a_3)e_2\right),$$

$$a_3 = \underbrace{c_1 e_1 + c_2 e_2}_{\text{ここが消えるように引き算をしてる}} + c_3 a_{other}$$ と書いた時、

このうつは直交するとして

$$\vdots$$

$$e_k := n\left(a_k - \sum_{i=1}^{k-1}(e_i, a_k)e_i\right)$$

← これも同様. a_k の中の, $e_1 \sim e_{k-1}$ の分を消している.

$$\vdots$$

$$e_n := n\left(a_n - \sum_{i=1}^{n-1}(e_i, a_n)e_i\right)$$

実際にやってみよう。(教p.117 例題6.2.1)

$\{a_1, a_2, a_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に対して、標準内積を用いるとして、

$$e_1 := \mathfrak{n}(a_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$e_2 := \mathfrak{n}\bigl(a_2 - (e_1, a_2) e_1\bigr) = \mathfrak{n}\left(a_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 4 e_1\right) = \mathfrak{n}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$e_3 := \mathfrak{n}\bigl(a_3 - (e_1, a_3) e_1 - (e_2, a_3) e_2\bigr) = \mathfrak{n}\left(a_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 \cdot e_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (-2) \cdot e_2\right)$$

$$= \mathfrak{n}\left(a_3 - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathfrak{n}\left(\begin{pmatrix} 5/6 \\ -5/6 \\ 5/3 \end{pmatrix}\right) = \mathfrak{n}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ここが少しズルい。

よって $\{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ //.

def. 直交変換: $V \to V$ の線形写像 T が $(T(u), T(v)) = (u, v)$ for $^\forall u, v \in V$ の時、このTを直交変換と言う.

Th 6.2.4 $\overset{n\times n 行列}{A}$ に対し、$x \in \mathbb{R}^n$ に対して線形写像 T を $T(x) := Ax$ と定義すると、

A が直交行列 $\Leftrightarrow$ T が直交変換.

証) 簡単で、T が直交変換 $\overset{def.}{\Leftrightarrow}$ $(T(x), T(y)) = (x, y)$ for $^\forall x, y$

$\{e_i\}$: 正規直交基底として.

$\begin{cases} x = \sum x_i e_i, \\ y = \sum y_i e_i \end{cases}$ とすると 分かるよ!

$$\Leftrightarrow (T(e_i), T(e_j)) = (e_i, e_j)$$

$$(T(e_i), T(e_j)) = (Ae_i, Ae_j) = (a_i, a_j), \quad (e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

ただし、$A = (a_1 a_2 \cdots a_n) \to$

(a_i, a_j) より、$\Leftrightarrow \underbrace{(a_i, a_j) = \delta_{ij}}$.

これは A が直交行列の定義. ▨