## §5.4 行列の対角化 ～ いつもできるわけではないが、できると便利

def. $\overset{n\times n}{A}$ の対角化とは、$\exists$正則行列 $P$ によって $P^{-1}AP$ = 対角行列 とするコト.

Th. 5.4.2. $\overset{n\times n}{A}$ が対角化可能 $\Leftrightarrow$ $A$ の一次独立な固有ベクトルが $n$ 個在る.

証明）対角行列を $D$ として、$A$ が対角化可能 $\Leftrightarrow D=P^{-1}AP \Leftrightarrow PD=AP$ . ～(*)

Pが正則なので、$\{u_1, \cdots u_n\}$ は一次独立.

ここで $P=(u_1\ u_2 \cdots u_n)$, $D=\mathrm{diag}(d_i)$ とすると、

(*)$\Leftrightarrow$ $(d_1u_1\ \ d_2u_2 \cdots d_nu_n) = (Au_1\ \ Au_2 \cdots Au_n)$, つまり、

$\underline{Au_i = d_iu_i,\ \ u_i\neq 0}$, $(i=1\sim n)$ かつ $\{u_1, \cdots, u_n\}$ は一次独立. ▨

よって、$d_i$ は $A$ の固有値で $u_i$ は固有ベクトルだ.

$\overset{n\times n}{A}$ を対角化したければ、その一次独立な固有ベクトル $n$ 個を並べて $\overset{\text{正則行列}}{\underline{P}}$ にすれば良い !!

というコトも同時に分かる.

例題5.4.2 (教p.109) # 5-4-2

問. $A=\begin{pmatrix}5&6&0\\-1&0&0\\1&2&2\end{pmatrix}$ を対角化せよ.

解答例. まず eigen pair を全て求める.

固有値から求めよう.

$$0=\varphi_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}5-\lambda&6&0\\-1&-\lambda&0\\1&2&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}5-\lambda&6\\-1&-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\{-\lambda(5-\lambda)-6(-1)\}$$

$=(2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)=-(\lambda-2)^2(\lambda-3)$ より. 固有値は $\lambda=2$ (2重), 3.

$u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ として.

固有値2に対して,

$Au=2u \Leftrightarrow (A-2I)u=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3&6&0\\-1&-2&0\\1&2&0\end{pmatrix}u=0 \Leftrightarrow (1\ 2\ 0)u=x+2y=0$ より.

$\begin{cases}x=-2p,\\y=p,\\z=q\end{cases}$ ($p, q$: 自由パラメータ), 即ち. $u=p\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

よって固有ベクトルとして $u_{2,1}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $u_{2,2}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ と2個求まる.

固有値3に対して，

$$A\boldsymbol{u} = 3\boldsymbol{u} \Leftrightarrow (A-3I)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{①-②} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{②-2①} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{並べ}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$ で $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ として

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = +3z, \\ y = -z, \\ z = p \end{cases} \quad (p：自由パラメータ) \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = p\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ となるので，固有ベクトル $\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ととれる．

よって，$P = (\boldsymbol{u}_{2,1}\ \boldsymbol{u}_{2,2}\ \boldsymbol{u}_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，$P^{-1}AP = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & & O \\ & 2 & \\ O & & 3 \end{pmatrix}}_{D\text{とする．}}$ となるハズ．

Pの正則性と，$PD = AP$ を確かめれば充分．そして $PD$ の結果は#5-4-1から自明なので，$AP$ だけ計算すれば良い(*)

(*)… 確かめてみると，以下の通り．

まずPの正則性は，$\det P = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(2-3)$
$= 1 \neq 0$ でOK．

そして $AP = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ となり，$(2\boldsymbol{u}_{2,1}\ 2\boldsymbol{u}_{2,2}\ 3\boldsymbol{u}_3)$ の形になっているのでOK．

対角化って何がうれしいの? 〜 (Aが正則なら$A^{-1}$も含めて) $A^m$が計算し易い! #5-4-4

$\overset{n\times n}{A}$ が対角化可能ならば、

固有値 $\lambda_i$ を並べた 固有ベクトルを並べた

$$A = PDP^{-1} \quad \text{where 対角行列 } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ 正則行列 } \overset{n\times n}{P} = (u_1 \cdots u_n)$$ とできるので、

正整数 $m$ に対して

$$A^m = (PD\cancel{P^{-1}})\cdot(\cancel{P}D\cancel{P^{-1}})\cdot \cdots \cdot(\cancel{P}DP^{-1}) = PD^mP^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^m \end{pmatrix}P^{-1}$$ とできる.

本質的に、$m\to$大の時 $A^m$は $\left(\max_k |\lambda_k|\right)^m$ に
ほぼ支配されるコトを
意味する.

教p.106 例題5.4.1の結果を見て
考えておこう.

さらに、
$A$が正則ならば $\forall$固有値 = 非零 であるので (#5-3-7より)、

$$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & & \\ & 1/\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$$ とできる.

応用例. 行列の指数関数.

まず、$\overset{n\times n}{A}$ に対して、$e^A \overset{\text{def}}{:=} I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \cdots$ と定義される.

そして、$A$ が対角化可能ならば、対角化に用いる行列 $P$ で上の式をはさむと、

$$P^{-1}e^A P = P^{-1}\left(I + A + \frac{1}{2}A^2 + \cdots\right)P = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}}_{\text{対角行列}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\text{〃}} + \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}}_{\text{〃}} + \cdots + \frac{1}{k!}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix}}_{\text{〃}} + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$ と対角化できるので、

$e^A$ を計算できる!

$$\underline{e^A = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}}$$ とできる.

$e^A$ の応用例.

応用上, あらゆる場面で見かけるよ.

$u$ は $n$ 次元, $A$ は $n\times n$ 行列

線形常微分方程式 $\frac{d}{dt}u(t) = A\,u(t)$ を考えてみる.

実は, この解は一般に $u(t) = e^{tA}\,u(0)$ と書ける. ← 上の式に代入すると納得できる.

であるので, $A$ が対角化可能ならば,

$$解 = P\underbrace{\begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}}_{対角行列}P^{-1}\cdot u(0)$$

と書けてしまう!

時間発展問題が一部とはいえ手で解けてしまう価値は大きいぞ.