固有値と正則性の関係

つまり、
$^\forall$固有値 $\neq 0$.

Th. $\underset{n\times n \text{行列}}{A}$ が正則 $\Leftrightarrow$ A は 0 を固有値に持たない.

証明) Th. 2.4.2 より、A が非正則 $\Leftrightarrow$ $A\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ を満たす $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ が存在する

$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{u}$ と考えると、

$\Leftrightarrow$ $A\boldsymbol{u} = 0\boldsymbol{u}$, $^\exists\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow$ A は 0 を固有値に持つ. ▨

注: 次ページ #5-3-8 の知識 $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ を使うと、もっと直接的に証明できる.

固有値$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$と他の式の関係 #5-3-8

$$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{22}-\lambda & & \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^n + \cdots + C_1 \lambda + C_0$$

← (*)として

固有値λ_kは$\varphi(\lambda) = 0$の根。

$$= (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$ と考えると、

解と係数の関係より、

$$\begin{cases} C_0 = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n , \\ C_{n-1} = (-1)^{n-1} (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) \end{cases} \quad \sim (*1)$$

また、(*)の形より、

$$\begin{cases} C_0 = \det A , \\ C_{n-1} = (-1)^{n-1} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{kk}}_{Tr(A)と言う。} \end{cases} \quad \sim (*2)$$

← $\lambda = 0$とするとこうなる。

← (*)のλ^{n-1}は対角成分の積からもたらされるのみなので。

となるので、

トレース

対角成分の和。

$$\begin{cases} \det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n , \\ Tr\, A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \end{cases}$$ である。

det, Tr の性質でよく使うもの.

- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, for 正方行列 A, B.

  $= \det(BA)$

  応用例. $\underset{1}{\underset{\shortparallel}{|I|}} = |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$ より、$|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

- $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, for $\overset{n\times m}{A}$, $\overset{m\times n}{B}$.

  §5.4で良く出てくる「対角化」もこの形.

  応用例. 正則行列 P によって $B := P^{-1}AP$ とした時、

  $$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(APP^{-1}) = \mathrm{Tr}(A).$$