§5.3 固有値 … 線形写像の特徴・性質として重要なもの。

def. 正方行列Aに対し、$A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$，ただし $\lambda\in\mathbb{C}$，$\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ が成り立つ時、

$$\begin{cases} \lambda : A\text{の固有値 (eigen value)}, \\ \boldsymbol{u} : \quad〃\quad \text{固有ベクトル (eigen vector)} \end{cases}$$

← このペアを eigen pair と言ったりする

と言う。

→ $W_\lambda := \{\boldsymbol{u} \mid A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}\}$ を Aの固有値λの固有空間と言ったりする。

注: 線形 $T: U\to V$ に対し、$T(\boldsymbol{u})=\lambda\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ の時、λをTの固有値，$\boldsymbol{u}$をTの固有ベクトルと言う。

このλと$\boldsymbol{u}$は基底のとり方に関係ないコトに注意。

そして、線形 $T: U\to U$ で Uの基底$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$に対し、$T$の表現行列を$A_T$とすると、

- Tの固有値 λ = A_Tの固有値 λ
- Tの固有ベクトル $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2 \cdots \boldsymbol{u}_n)\underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}}_{A_T\text{の固有ベクトル}}$

つまり、A_Tの固有ベクトルはTの固有ベクトルの座標。

固有値・固有ベクトルの求め方 (Th. 5.3.1 相当)

$A\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u} \Leftrightarrow (A-\lambda I)\mathbf{u}=\mathbf{0}$, $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$ なので $A-\lambda I$ は非正則.

もし $(A-\lambda I)$ が正則だと、$\mathbf{u}=(A-\lambda I)^{-1}\mathbf{0}=\mathbf{0}$ で矛盾.

$\Leftrightarrow \underbrace{\det(A-\lambda I)}=0$. …(*)

これをAの固有多項式(変数はλ)と言う.

(*)は λの n次多項式 $=0$ (Aが $n\times n$ の場合) なので、解けば(重複込みで) n個の固有値が求まる ①

さらに、求まった各々のλに対して、

$(A-\lambda I)\mathbf{u}=\mathbf{0}$ を解いて、対応する固有ベクトルも求まる. ②

λの数字を代入する

注. 固有ベクトルを全て集めても n本無いかも. つまり、
$\dim(\mathrm{span}(\text{全ての固有ベクトル}))\leq n$.

$\dim(\cdots)<n$ の時は広義固有ベクトルが存在して… (§8ぐらいの内容. 略).

計算の例. $A=\begin{pmatrix}7 & -6\\3 & -2\end{pmatrix}$ の eigen pair を求める.

Step 1. 固有値を求める.

$$0=\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}7-\lambda & -6\\3 & -2-\lambda\end{pmatrix}=(7-\lambda)(-2-\lambda)-(-6)\cdot 3=(\lambda-7)(\lambda+2)+18$$

$=\lambda^2-5\lambda+4=(\lambda-1)(\lambda-4)$ より、$\lambda=1, 4$ (この2つが固有値)

Step 2. 対応する固有ベクトルを求める.

$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ として

<u>固有値1に対して</u> $(A-1\cdot I)\mathbf{u}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}6 & -6\\3 & -3\end{pmatrix}\mathbf{u}=\mathbf{0} \Leftrightarrow u_1-u_2=0$ より.

$\mathbf{u}=c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $c\neq 0$ が固有値1に対する固有ベクトル.

<u>固有値4に対して</u> $(A-4I)\mathbf{u}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3 & -6\\3 & -6\end{pmatrix}\mathbf{u}=\mathbf{0} \Leftrightarrow u_1-2u_2=0$ より.

$\mathbf{u}=c\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $c\neq 0$ が固有値4に対する固有ベクトル.

Th. 5.3.2 (ケーリー・ハミルトン)

$n\times n$ 行列 A の固有多項式 $|A-\lambda I|$ を $\varphi_A(\lambda)$ と書き、この n 次多項式 $\varphi_A(\lambda)$ の λ に A を代入した式 $\varphi_A(A)$ について、

(ただし λ^0 項には I を代入する)

$$\varphi_A(A) = O \leftarrow \text{行列}$$

が成り立つ(証略).

例. #5-3-3 の A に対しやってみる. $\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4$ なので、

$$\varphi_A(A) = A^2 - 5A + 4I = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 31 & -30 \\ 15 & -14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 35 & -30 \\ 15 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ で、確かに正しい.

ケーリー・ハミルトン Th. の使い途.

Aが n×n の場合

$0 = \varphi_A(A) = A$ の n 次多項式 なので、 $A^n =$ A の $(n-1)$ 次多項式 と変形できる.
よって、それをくり返して考えると、

$$A^m = A \text{ の } (n-1) \text{ 次多項式} \qquad ({}^\forall m \geq n)$$

と変形できる. つまり、A の n乗以上は、より低次の計算で済んでしまうのだ.

結構 役に立つよ.

例1. #5-3-3 の A を対象に、A^{20} を計算してみよう.

まず、A^{20} を $\varphi_A(A) = A^2 - 5A + 4I$ で割ってみると、

c_1, c_0 はスカラー.

$$A^{20} = \underbrace{(A^{18}+5A^{17}+\cdots)}_{\text{商. 計算しないよ!}} \cdot \underbrace{(A^2-5A+4I)}_{\varphi_A(A)} + \underbrace{c_1A+c_0I}_{\text{余り}} \quad \cdots(*)$$

となる.

この割り算はスカラーでの計算と同じなので、$x\in\mathbb{R}$ に対しても同じ形、係数で

$$x^{20} = (x^{18}+5x^{17}+\cdots)\cdot\underbrace{(x^2-5x+4)}_{\varphi_A(x)} + c_1x+c_0$$

が成り立つ.

$\varphi_A(1)=\varphi_A(4)=0$ を上手く利用して $\begin{cases} 1^{20} = c_1\cdot 1 + c_0 \\ 4^{20} = c_1\cdot 4 + c_0 \end{cases}$ となるので、$\begin{cases} c_1 = \dfrac{4^{20}-1}{3}, \\ c_0 = \dfrac{4-4^{20}}{3} \end{cases}$ を得る.

これを(*)に代入すると、

$$A^{20} = 4^{20}\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&2\\-1&2\end{pmatrix}$$

と求められる. //

注. この場合、$A^m = 4^m\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&2\\-1&2\end{pmatrix}$, $m\ge 2$ と一般化できてしまうぞ.