§4.4 ベクトル空間の基底と次元

#4-2-2で出てきたよ.

復習. ベクトル$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$の一次結合全ての集合 $=$ $\mathrm{span}\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ はベクトル空間になっている.

(この $\mathrm{span}\{\cdots\}$ を, ベクトル$\{u_1, \cdots, u_n\}$の張る空間とか、生成する空間などと呼ぶ).

注. Vの基底は無数にあるよ.

def. ベクトル空間Vに対し、ベクトル$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$が$V$の基底(basis)である.

$$\overset{\text{def.}}{\iff} \begin{cases} V = \mathrm{span}\{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \\ \quad\text{かつ} \\ \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \text{ は一次独立} \end{cases}$$

→ つまり、${}^\forall v \in V$ は必ず Vの基底$\{u_1, \cdots, u_n\}$を用いて

$v = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n$ と一意に表わせるし、

逆に、${}^\forall v \in V$ がこのように一意に表わせるならば

$\{u_1, \cdots, u_n\}$はVの基底である.

例. $V = \mathbb{R}^n$ に対し、$e_k := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (k とすると $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ は Vの基底である.

これを$\mathbb{R}^n$の標準基底と言うこともある.

上の注に書いたように Vに対する基底は無数にあるが、それらに共通して言えることがある。

↓

Th. 4.4.1

ベクトル空間Vの基底に含まれるベクトルの個数は基底によらず一定である。

↑ dimension

これをVの次元と言い、$\dim(V)$と書く。

ゼロ空間とも言う。

$c\mathbf{0} = \mathbf{0}$を満たすcが無数にあるので。

注. ゼロベクトル「のみ」からなる集合$\{\mathbf{0}\}$は定義上ベクトル空間である。

そして、$\{\mathbf{0}\} = \mathrm{span}\{\mathbf{0}\}$であるがベクトル$\mathbf{0}$は一次独立ではないので$\{\mathbf{0}\}$は基底を持たない。

よって $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$. つまり、ゼロ空間の次元はゼロ。

注. $\dim(V)$が有限な時、Vを有限次元ベクトル空間と言ったりする。

Th. 4.4.2 (ほぼ当然)

$\dim(V) = V$の一次独立なベクトルの最大個数

例. $V = \mathbb{R}^n$ の時、 $\dim V = n$. ← 標準基底を思えば良い.

$n+1$ 個のベクトルが入っている.

例. $V = \mathbb{R}[x]_n$ (n次多項式全て) の時、例えば $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ は V の基底であるので

$\dim V = n+1$.

例. $M = \left\{ x \in \mathbb{R}^3,\ ただし,\ x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} に対し\ x+y+z=1 \right\}$ の時は?

制約条件が1つ有るのでそれを用いて自由度を1つ減らすというコトを明確にしよう.

この場合は $x+y+z=1 \Leftrightarrow z = 1-x-y$ として自由度 z を消去して、

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$$ と書き直せる. すると、

$0 \notin M$ だ、ということも示しているので M そのものはベクトル空間ではないことも示している.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ となるので、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を原点にとり直すならば

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ が基底となっているとみなせる. つまり、例えば

$$V := \left\{ x - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ x \in M \right\}$$ は基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ を持つベクトル空間で $\dim(V) = 2$.

Mは2次元な存在だが、原点を含んでいないのでベクトル空間ではない.

• 連立一次方程式との関係 ～ Ker（カーネル）で理解する.

#4-1-5で示したように、$\mathrm{Ker}(A) = \{ x \mid Ax = 0 \}$ はベクトル空間である.

この $\mathrm{Ker}(A)$ の基底を $Ax = 0$ の**基本解**と言ったりする.

例（教 p.83 例題 4.4.1）で少し見てみる.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$$

を $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}}_{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と書き直して A を簡約化すると、

rank(A) = 2 を示している.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{②-2①} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{①-②} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 - 3x_4 - x_5, \\ x_3 = x_4 - 2x_5, \\ x_2 = C_1 \ (\text{パラメータ}), \\ x_4 = C_2 \ (\text{〃}), \\ x_5 = C_3 \ (\text{〃}) \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} 2C_1 - 3C_2 - C_3 \\ C_1 \\ C_2 - 2C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = C_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_1} + C_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_2} + C_3 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_3}$$

として となるので、

$\{u_1, u_2, u_3\}$ が $\mathrm{Ker}(A)$ の基底で、$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3$. ← 解 x の自由度 = 3 とも言う.

(!) $x \in \mathbb{R}^5$ は本来、5つの自由度を持っていたことに着目しておこう.

↓
ここから言えることは？

x_2, x_4, x_5 に対応していた

事実：$x \in \mathbb{R}^5$ に対し、$3 = \dim(\mathrm{Ker}(A))$ 個のパラメータ c_1, c_2, c_3 を用いて $Ax = \mathbf{0}$ の解は書けた。
この時、$5-3=2$ は、$\mathrm{rank}(A) = 2$ と一致した。

x_1, x_3 に対応していた。

より、

Th. 4.4.3（線形写像の重要な定理として Th. 5.1.2 で再登場するよ）

$A = m\overbrace{\boxed{m \times n \text{ 行列}}}^{n}$ の時、 $n = \mathrm{rank}(A) + \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(A))}$ である。

Aから欠けた次数というニュアンスで
Aの退化次数と言ったりするよ。

例．上の例だと、 $\overset{n}{\overset{\shortparallel}{5}} = \overset{\mathrm{rank}(A)}{\overset{\shortparallel}{2}} + \overset{\dim(\mathrm{Ker}(A))}{\overset{\shortparallel}{3}}$ だね。

(教科書でここで出てくる定義)

#4-2-2, #4-4-1 などで出てきた

$\mathrm{Span}\{u_1, u_2, \cdots, u_n\} = u_1, u_2, \cdots, u_n$ の一次結合全てによる集合

($u_1, u_2, \cdots, u_n$ によって生成されたベクトル空間 などとも言ったね)

を、教科書では

$\langle u_1, u_2, \cdots, u_n \rangle$ などと書いたりする.