§4. ベクトル空間

高校までのは3次元までのユークリッド空間だね.

まず、大学で学ぶ「空間」は、高校まで扱っていた空間よりも抽象度の高い概念だ.

空間 = ルールの有る集合

と思っておこう.

そしてここでは、線形代数の主役であるベクトルが集まった集合であるベクトル空間について学ぶ.

一般に、K という記号で書いたりする.

「四則演算の結果もその集合に含まれる」という意味.

def. 体 (field). 数の集合で、ゼロで割ることを除いてその中で四則演算が行えるものをいう.

- 有理数全体のなす体を有理数体といい、$\mathbb{Q}$ と書いたりする.
- 実数 〃 実数体 〃 $\mathbb{R}$
- 複素数 〃 複素数体 〃 $\mathbb{C}$ 〃 .

注: 整数全体は体にならない. というのも、整数/整数 は一般に整数ではないので.

def. ベクトル空間.

V が体 K 上のベクトル空間である

$$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{array}{ll}\text{和：} & u+v\in V \quad (u,v\in V)\\ \text{スカラー倍：} & au\in V \quad (a\in K,\ u\in V)\end{array}\right.$$

が定義されていて、次の 1〜8 を満たす.

ゼロベクトルと呼ぶよ.

1. $u+v=v+u$,
2. $u+(v+w)=(u+v)+w$,
3. $^{\exists}\mathbf{0}\in V$ が存在して $u+\mathbf{0}=u$,
4. $a(bu)=(ab)u$,
5. $(a+b)u=au+bu$,
6. $a(u+v)=au+av$,
7. $1u=u$,
8. $0u=\mathbf{0}$

注、上の 1〜8 には変わったものは含まれておらず、定義自体には特に注意すべき点は無い.

要注意なのは この定義，いや、この概念の **適用範囲の広さ** である.

下の例にも現われるが、**こんなものもベクトル空間なのか！** とおどろくようなものがある.

例. ベクトル空間の例を挙げておこう.

1. 実数を要素にもつ n 次元ベクトル全体の集合は　$\mathbb{R}^n$ と書いたりする.
(これまで学んできた)行列演算の和, スカラー倍のもとで $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である.

2. 実数係数の n 次以下の多項式全体($\mathbb{R}[x]_n$ と書いたりする)は,
通常の多項式の和と定数倍のもとで $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である.

3. 区間 (a, b) 上で連続な実函数全体($C(a, b)$ と書いたりする)は,
通常の函数の和と定数倍のもとで $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である.

… 上の例は $\mathbb{R}$ に注目したものだが、他の体でも同様だ.

注. 上の例の2や3はこれまでに無い概念で見慣れないだろうが、応用上 大変に重要になってくるので今のうちに理解しておこう.

def. 部分空間 (subspace). ベクトル空間 V の部分集合 W が V の和とスカラー倍でベクトル空間となるとき、W を V の(線形)部分空間、もしくは部分ベクトル空間と言う.

Th 4.1.1

W がベクトル空間 V の部分空間 $\Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ \mathbf{0} \in W, \text{ かつ} \\ 2.\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v} \in W, \text{ かつ} \\ 3.\ a \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \in W \Rightarrow a\mathbf{u} \in W. \end{cases}$

§5.1で出てくるが先取りしよう.

def. 核 (kernel). 行列 A に対し $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{x}$ 全体のなす集合を A の核(カーネル)と言い、$\mathrm{Ker}(A)$ と書く.

例. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ に対し、$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解は ノート#11 (2021前期の授業の) でのケース3の例同様にして

$\mathbf{x} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$ (パラメータ) となるので、$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R} \right\}$.

• 重要な事実. $m \times n$ 行列 A の核 $\mathrm{Ker}(A)$ は $\mathbb{R}^n$ の部分ベクトル空間である.

…proof は教. 例題 4.1.1 を見よ.

Ker. の定義そのもの, だよね

注. A の核 $\mathrm{Ker}(A)$ を、同次形連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間 とも言う.

Q. だから? どう役に立つの?

A. 対象としている集合が 空間になっていれば $\overbrace{\text{色々な性質}}^{\text{空間としての}}$ を持つコトが分かるのでありがたいのだ.

逆に, 空間になってないということは、その集合を扱い易くするルールが無さそう ということでもある.

例．部分空間になっているか？

1．(教．例題 4.1.2 (2))．$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間か？

→ W が $\mathbb{0}$ を含み，かつ，$\mathbb{R}^3$ の和，スカラー倍に対して閉じていれば W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間だ．
よってこの3つの条件を check すれば良い．
結果がその集合に含まれるという意味．
まず $\mathbb{0} \in W$ か？は，$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ であるので $\mathbb{0} \notin W$．
よって W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間ではない．

2．(教．例題 4.1.3 (3))．$W = \left\{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \;\middle|\; x f'(x) = 2f(x) \right\}$ は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間か？

→ W が $\mathbb{0}$ ($= 0u$, $u \in \mathbb{R}[x]_3$ なので，$\mathbb{0}$ = 定数0という多項式) を含み，かつ $\mathbb{R}[x]_3$ の和，スカラー倍について閉じているかを check する．
まず，$\mathbb{0} \in W$ か？は，$f(x) = \mathrm{const}.\,0$ に対して $f' = 0$ なので $x \cdot f' = 0 = 2 \cdot 0$ より Yes．
次に $f, g \in W$ に対し $f+g \in W$？は $x(f+g)' = xf' + xg' = 2f + 2g = 2(f+g)$ より Yes．
最後に，$a \in \mathbb{R}$，$f \in W$ に対し $af \in W$？は

$$x(af)' = xaf' = axf' = a \cdot 2f = 2af = 2(af)$$ より Yes．

よって W は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間である．

で、何が言えるのか？

- 上の例の2、では、「Wに対して和とスカラー倍が閉じていて、Wは#22-2の性質1〜8を持つ」ことが保証されたということになる。これは有力な情報といえる。

- 例の1.ではWの性質について情報が増えていない。扱いにくいね。