p.97 問1(2) 解答例

まず、問を正しく解釈しよう。問は線形写像 $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ に対し、

暗黙の前提として自然基底を用いた場合、Tの表現行列は $A_T=\begin{pmatrix}2&4&3&1\\0&-3&1&1\\1&2&1&0\end{pmatrix}$ だ、と言っている。

・$\mathbb{R}^n$ に対し、$e_k^{(n)}:=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\\\\(k\\\\\\\\\end{array}\in\mathbb{R}^n$ として $\{e_1^{(n)},e_2^{(n)},\cdots,e_n^{(n)}\}$ のコト。

つまり、$u_k:=e_k^{(4)}$, $k=1\sim4$, $v_k:=e_k^{(3)}$, $k=1\sim3$ として $u\in\mathbb{R}^4$, $T(u)\in\mathbb{R}^3$ に対して

$$u=(u_1\ u_2\ u_3\ u_4)\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}}_{u\text{の自然基底による座標}},\quad T(u)=(v_1\ v_2\ v_3)\underbrace{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}}_{T(u)\text{の自然基底による座標}}$$

とすると

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&3&1\\1&-3&1&1\\1&2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

だ、と言っている。

そして、新しい基底 $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{u}_4\}$ for $\mathbb{R}^4$, $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3\}$ for $\mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{array}{l} \tilde{u}_1 = (u_1\ u_2\ u_3\ u_4)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\ \tilde{u}_2 = (\ \ 〃\ \ )\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ \tilde{u}_3 = (\ \ 〃\ \ )\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\ \tilde{u}_4 = (\ \ 〃\ \ )\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \\ \tilde{v}_1 = (v_1\ v_2\ v_3)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \tilde{v}_2 = (\ \ 〃\ \ )\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \tilde{v}_3 = (\ \ 〃\ \ )\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \end{array}\right)$$

に対して、T の表現行列 $\tilde{A}_T$ を求めよ、というのが問の要求だ。

ただし、中味は実質的に同じ。

そして解法だが、基底の変換行列を用いた定理 Th 5.2.1 を用いない方法 ① と 用いる方法 ② が有る。

#p97問1(2)-3

基底の変換行列を用いた定理 Th 5.2.1 を用いない方法

#5-2-3 より.

$$\left(T(\tilde{u}_1)\ T(\tilde{u}_2)\ T(\tilde{u}_3)\ T(\tilde{u}_4)\right) = (\tilde{v}_1\ \tilde{v}_2\ \tilde{v}_3)\,\tilde{A}_T$$ であるので、

少しずつ $\tilde{v}_k$ に直していく(注)

$$T(\tilde{u}_1) = (v_1\ v_2\ v_3)A_T\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix} = (v_1\ v_2\ v_3)\begin{pmatrix}8\\-1\\3\end{pmatrix} = 3\tilde{v}_2 + (v_1\ v_2\ v_3)\begin{pmatrix}5\\-1\\0\end{pmatrix} = 3\tilde{v}_2 + 5\tilde{v}_1 + (v_1\ v_2\ v_3)\begin{pmatrix}0\\-6\\0\end{pmatrix}$$

$$= 5\tilde{v}_1 + 3\tilde{v}_2 - 6\tilde{v}_3 + (v_1\ v_2\ v_3)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = (\tilde{v}_1\ \tilde{v}_2\ \tilde{v}_3)\underbrace{\begin{pmatrix}5\\3\\-6\end{pmatrix}}_{T(\tilde{u}_1)\text{の基底}\{\tilde{v}_1,\tilde{v}_2,\tilde{v}_3\}\text{による座標.}}.$$

上の注：実は、

$$(\tilde{v}_1\ \tilde{v}_2\ \tilde{v}_3)\begin{pmatrix}\tilde{y}_1\\\tilde{y}_2\\\tilde{y}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-1\\3\end{pmatrix}$$

を解いているだけ.

同様にして $T(\tilde{u}_2) = (\tilde{v}_1\ \tilde{v}_2\ \tilde{v}_3)\begin{pmatrix}6\\4\\-7\end{pmatrix}$,

$T(\tilde{u}_3) = (\quad〃\quad)\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$,

$T(\tilde{u}_4) = (\quad〃\quad)\begin{pmatrix}5\\4\\-7\end{pmatrix}$ であるので、

$$\tilde{A}_T = \begin{pmatrix}5 & 6 & -1 & 5\\3 & 4 & 0 & 4\\-6 & -7 & 0 & -7\end{pmatrix}$$ //.

基底の変換行列を用いた定理 Th 5.2.1 を用いる方法

$\mathbb{R}^4$ の基底が自然基底から $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{u}_4\}$ に、$\mathbb{R}^3$ 〃 $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3\}$ に変換されるので、
各々の変換行列を P, Q とおくと

$$\underset{(\tilde{u}_1\ \tilde{u}_2\ \tilde{u}_3\ \tilde{u}_4)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \underset{(u_1\ u_2\ u_3\ u_4)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot P = I \cdot P = P. \quad 同様に、\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = Q.$$

よって Th 5.2.1 より $\tilde{A}_T = Q^{-1} A_T P$ に上の P, Q を入れて計算すれば良い…が、
逆行列を計算するのは愚かであるので、以下のように考える。

まず、$\tilde{A}_T = Q^{-1}A_T P \Leftrightarrow Q\tilde{A}_T = A_T P$.

$A_T P$を計算した結果

$$\Leftrightarrow Q\underbrace{\left(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4\right)}_{\tilde{A}_T} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & -1 & 9 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ と考えると、

↖とおく

$\parallel$ $\mathbf{b}_1$ $\mathbf{b}_2$ $\mathbf{b}_3$ $\mathbf{b}_4$ とおく.

未知　既知

$\Leftrightarrow Q\mathbf{a}_k = \mathbf{b}_k$, $k = 1, 2, 3, 4$ （4つの連立一次方程式）

$\Leftrightarrow \left(Q \,\vdots\, \mathbf{b}_k\right) \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left(I \,\vdots\, \mathbf{a}_k\right)$, $k = 1, 2, 3, 4$ となる。ということで、これをくっつけて一度で

拡大係数行列

$\Leftrightarrow \left(Q \,\vdots\, \mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3\ \mathbf{b}_4\right) \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left(I \,\vdots\, \underbrace{\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4}_{\tilde{A}_T}\right)$ とすれば効率が良い！！

あとは計算するのみ.

$$
\left(\begin{array}{ccc:cccc} 1 & 1 & 0 & 8 & 10 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 4 \end{array}\right)
\xrightarrow{①-②}
\left(\begin{array}{ccc:cccc} 0 & 1 & -1 & 9 & 11 & 0 & 11 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 4 \end{array}\right)
\xrightarrow{①-③}
\left(\begin{array}{ccc:cccc} 0 & 0 & -1 & 6 & 7 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 4 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{②+①}
\left(\begin{array}{ccc:cccc} 0 & 0 & -1 & 6 & 7 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 6 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 4 \end{array}\right)
\xrightarrow{\text{整理}}
\left(\begin{array}{ccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 6 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -7 & 0 & -7 \end{array}\right)
$$

右側の 3×4 ブロック $= \tilde{A}_T$ //.