Mini Test (線形代数学 II)

実施日 2022.12.06

問 1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$, ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ に対し、連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ．ただし，解が存在しない場合は理由も含めてその旨を述べ，また，解に任意パラメータ (複数もあり) が含まれる場合はそれらについてもきちんと記述せよ．

問 2. x の二次多項式 $\boldsymbol{R}[x]_2$ 中のベクトル $\boldsymbol{v}_1 = 1+x+3x^2$, $\boldsymbol{v}_2 = 1+2x$, $\boldsymbol{v}_3 = 1+3x-3x^2$, $\boldsymbol{v}_4 = -2-4x+x^2$, の一次関係を調べよ．具体的には以下のように答えれば良い．

- この中で一次独立なベクトルの最大個数 r を求めてこれを解答し，
- 前の方から，r 個の一次独立なベクトルを挙げ，
- 残りのベクトルを，上で求めた r 個の一次独立なベクトルの一次結合で表わす．

問 3. ベクトル空間 $V = \left\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^5 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 0\right\}$ の基底を求めよ．また，$\dim(V)$ も求めよ．

問 4. ベクトル空間 $V = \{f \in \boldsymbol{R}[x]_3 \mid f(2) = 0, f'(2) = 0\}$ の基底を求めよ．また，$\dim(V)$ も求めよ．

問 5. 線形写像 $T : \boldsymbol{R}[x]_2 \to \boldsymbol{R}[x]_3$ が，$f \in \boldsymbol{R}[x]_2$ に対して $T(f) = f(x) \cdot (1+x) + 2f'(x) \cdot (1+x^2)$ であるとき，$\boldsymbol{R}[x]_2$ の基底を $\{1, x, x^2\}$, $\boldsymbol{R}[x]_3$ の基底を $\{1, x, x^2, x^3\}$ として T の表現行列を求めよ．

問 6. 行列 $A = \begin{pmatrix} 13 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & 11 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルのペアをすべて求めよ．

問 7. $n \times n$ 行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とすると $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n$, $\mathrm{Tr}\ A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ であることと，行列 A の固有多項式 $\varphi_A(\lambda)$ に対して $0 = \varphi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$ であること, そして解と係数の関係とを組み合わせて，行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を計算せよ．

注: 他解法は採点対象外なので，解答欄には解法を確認できるような途中状態等を記載すること．

問 8. ケーリー・ハミルトンの定理を用いて, 問 7 の行列 A に対して A^{100} を求めよ．

注: 他解法は採点対象外なので，解答欄には解法を確認できるような途中状態等を記載すること．

問 9. 問 6 の行列 A を対角化せよ．ただし，

- 対角化に用いる行列 P,
- 対角化の形，つまり 対角行列= (A,P を用いた形) の右辺の表式,
- 対角化の結果，つまり 対角行列= (A,P を用いた形) の左辺の行列

をすべて具体的に答えよ．また，その対角化が正しいことを確認せよ．

問 10. 問 6 の行列 A に対し，$\exp(A)$ を求めよ．

以上.

おまけ: 表現行列の簡単な計算方法

線形写像 $T : \boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{v}$ の表現行列の計算は，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ をそれぞれの基底を用いた座標ベクトル
$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$ で考えて，$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = A_T \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ となる行列 A_T を求めるだけで良い．