ミニテスト解答例.

#M1-1

問1. 普通の連立一次 eq. 問題. $Ax=\mathbb{b}$ を解く為に、$\overset{\text{拡大係数行列}}{(A \,\vdots\, \mathbb{b})}$ を行基本変形で $(I \,\vdots\, x)$ に変えれば良い.

$$(A \,\vdots\, \mathbb{b}) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 8 & 10 & 12 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{③}/2]{\text{②}-\text{①}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{③}-4\text{②}]{\text{①}-\text{②}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{①と③は等価なので1つに}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{①}-\text{②}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 1, \\ y + 2z = 0, \\ z = p, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + p \\ y = \quad -2p \\ z = p \end{cases} \Leftrightarrow \mathbb{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} /\!/ , \quad p: \text{自由パラメータ}$$

問2. $\mathbb{R}[x]_2$ の基底を用意する. 分かり易いのは $\{1, x, x^2\}$ かな. これを用いるとして、

$$v_1 = (1 \ x \ x^2)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{v_1\text{の座標}}, \ v_2 = (\ 〃\ )\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2\text{の}〃}, \ v_3 = (\ 〃\ )\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}}_{v_3\text{の}〃}, \ v_4 = (\ 〃\ )\underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_4\text{の}〃} \text{なので、}$$

これらの座標を用いて一次関係を判定する.

#M1-2.

それには、$\underbrace{c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 = \mathbf{0}}$ (*1) を成立させる $c_1 \sim c_4$ について調べれば良い。

この式の拡大係数行列を、前ページの座標を用いて書くと

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & \underbrace{0} \end{array}\right) \xrightarrow[③-3①]{②-①} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[③+3②]{①-②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{②+2③} \overset{(*2)}{\begin{array}{cccc} \left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right) \\ \tilde{v}_1 & \tilde{v}_2 & \tilde{v}_3 & \tilde{v}_4 \end{array}}$$

0ばかりで行基本変形の影響を受けないので、以降省略する

として、

結局、$\tilde{v}_1 \sim \tilde{v}_4$ の一次関係を調べるコトと同値である。← (*1)と(*2)による $c_1 \tilde{v}_1 + \cdots + c_4 \tilde{v}_4 = \mathbf{0}$ は同値なので。

そしてこれは一目で見て分かるように、

- $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_4\}$ が最大な一次独立セット ($\Leftrightarrow r = 3$)
- $\tilde{v}_3 = -\tilde{v}_1 + 2\tilde{v}_2$

) である。

よって

㊙解 {
- $r = 3$、
- 一次独立なベクトル3つとして v_1, v_2, v_4、
- 残りは $v_3 = -v_1 + 2v_2$.

← 確かめてみると、$-v_1 + 2v_2 = -1 - x - 3x^2 + 2 + 4x = 1 + 3x - 3x^2$

v_3 と一致!

問3. $V = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ というコトになるので、

$$\text{拡大係数行列}\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 3 & 8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{②}-2\text{①}} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{②}\times(-1)]{\text{①}+2\text{②}} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \quad + 7x_5 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_2 = p_1, \\ x_3 = p_2, \\ x_5 = p_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2p_1 - p_2 - 7p_3 \\ x_2 = p_1 \\ x_3 = \quad p_2 \\ x_4 = \quad\quad 2p_3 \\ x_5 = \quad\quad p_3 \end{cases} \Leftrightarrow x = p_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + p_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} + p_3 \underbrace{\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3}$$

p_1, p_2, p_3 → 自由パラメータ

とすると

これらの一次結合で $x \in V$ は表わせることが分かる。

Vの基底は$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim V = 3$.

問4. なんでも良いので $\mathbb{R}[x]_3$ の基底を用意して、座標での計算に持ち込む.

まあ、$\{1, x, x^2, x^3\}$ で良いだろう.

よって $f \in \mathbb{R}[x]_3$ を $f = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 = (1\ x\ x^2\ x^3)\underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}_{\longrightarrow \text{これが } f \text{ の座標.}}$ として、

$$\begin{cases} \text{条件1} : f(2) = 0 \Leftrightarrow c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 4 + c_3 \cdot 8 = 0. \\ \text{条件2} : f'(2) = 0 \Leftrightarrow c_1 + 2c_2 \cdot 2 + 3 \cdot c_3 \cdot 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \end{pmatrix} \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overset{\text{拡大係数行列}}{\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right)} \xrightarrow{①-2②} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -4 & -16 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \quad -4c_3 - 16c_4 = 0, \\ \quad c_2 + 4c_3 + 12c_4 = 0, \\ \qquad c_3 \qquad = p_1, \\ \qquad\qquad c_4 = p_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 4p_1 + 16p_2 \\ c_2 = -4p_1 - 12p_2 \\ c_3 = p_1 \\ c_4 = p_2 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbb{C} = p_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ より、}$$

V の基底は $\{4 - 4x + x^2,\ 16 - 12x + x^3\}$, $\dim V = 2$.

問5. 入力 $f=(1\ x\ x^2)\underbrace{\begin{pmatrix}c_0\\c_1\\c_2\end{pmatrix}}_{f\text{の座標}}$, 出力 $T(f)=(1\ x\ x^2\ x^3)\underbrace{\begin{pmatrix}d_0\\d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}}_{T(f)\text{の座標}}$ として、

$$T(f)=(c_0+c_1x+c_2x^2)(1+x)+2(c_1+2c_2x)(1+x^2)$$

$$=\underbrace{(c_0+2c_1)}_{\overset{\shortparallel}{d_0}}+\underbrace{(c_0+c_1+4c_2)}_{\overset{\shortparallel}{d_1}}x+\underbrace{(\overset{\substack{3c_1+c_2\\ \shortparallel}}{c_1+c_2+2c_1})}_{\overset{\shortparallel}{d_2}}x^2+\underbrace{(\overset{\substack{5c_2\\ \shortparallel}}{c_2+4c_2})}_{\overset{\shortparallel}{d_3}}x^3$$ であるので、

$$\begin{pmatrix}d_0\\d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&4\\0&3&1\\0&0&5\end{pmatrix}}_{\text{これが }T\text{ の表現行列.}}\begin{pmatrix}c_0\\c_1\\c_2\end{pmatrix}.$$

問6.

#M1-6

まず固有値から.

$$0 = \varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 13-\lambda & -1 & 1 \\ 3 & 9-\lambda & 3 \\ -1 & 1 & 11-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_1-r_3}{=} \begin{vmatrix} 12-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 9-\lambda & 3 \\ -12+\lambda & 1 & 11-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_3+C_1}{=} \begin{vmatrix} 12-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 9-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 12-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(12-\lambda)^2$$

より. $\lambda = 9,\ 12$ (2重).

次に固有ベクトル.

$\lambda=9$ の場合、 $\mathbf{0} = (A-9I)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$

拡大係数行列

ダブったので不要.

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[②+3③]{①+4③} \left(\begin{array}{ccc:c} \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{9} & \cancel{0} \\ 0 & 3 & 9 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{整理}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{①+②} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0, \\ y + 3z = 0, \\ z = p \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = p\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より、

固有値9に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda = 12$ の場合、

$$\boldsymbol{0} = (A - 12I)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \overset{\text{明らかに}}{\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 \end{pmatrix}}\boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0, \\ y = p_1, \\ z = p_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = p_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって固有値 12 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の 2つ.

問7. 行列 A に対し $\det A = 10 - (-2) = 12$, $\mathrm{Tr}\, A = 7$ より、固有値 λ_1, λ_2 を根にもつ二次多項式は

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = \lambda^2 - 7\lambda + 12$$ となる.

これは $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = (\lambda - 3)(\lambda - 4)$ と因数分解できるので 固有値 $\lambda = 3, 4$ と求まる.

問8. ケーリー・ハミルトンより、 $\varphi_A(A) = A^2 - 7A + 12I = O$.

よって、 $A^{100} = \underbrace{P_{98}(A)}_{Aの98次式.} \cdot \underbrace{\varphi_A(A)}_{\to O.} + C_1 A + C_0 I$, C_0, C_1 : 未知スカラー. で、これに対し、

Aの固有値

スカラーλに対しても $\lambda^{100} = P_{98}(\lambda) \cdot \varphi_A(\lambda) + C_1 \lambda + C_0$ であり、 $\varphi_A(3) = \varphi_A(4) = 0$ であるので、

$$\begin{cases} 3^{100} = 3C_1 + C_0, \\ 4^{100} = 4C_1 + C_0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = -3 \cdot 4^{100} + 4 \cdot 3^{100} \\ C_1 = 4^{100} - 3^{100} \end{cases}$$

と判明するので、

$A^{100} = c_1 A + c_0 I$ に代入して ($a_3 := 3^{100}$, $a_4 := 4^{100}$ として)

$$= (a_4 - a_3)\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + (-3a_4 + 4a_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 4^{100}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 3^{100}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

#M1-9

問9. eigen pair は全て求まっているので、

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ とすれば } P^{-1}AP = \overset{D\text{として}}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}}} \text{ と対角化されるハズである.}$$

v_1 v_2 v_3 として

あとは正しさの確認のみ.

それには

v_1 〜 v_3 は固有ベクトルなのでこうなるハズではあるのだが.

こうなるならば、これ $= PD$ と変形できるので.

$$\begin{cases} \cdot\ P\text{ が正則 } \sim ① \\ \cdot\ AP\text{ を計算して } AP = \begin{pmatrix} 9v_1 & 12v_2 & 12v_3 \end{pmatrix} \text{ となるコト } \sim ② \end{cases}$$

を確かめれば良い.

$$① \text{ は、} |P| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_3 - r_1}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \text{ より OK.}$$

$$② \text{ は } Av_1 = \begin{pmatrix} -13+3+1 \\ -3-27+3 \\ 1-3+11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -27 \\ 9 \end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 9v_1, \quad Av_2 = \begin{pmatrix} 13-1 \\ 3+9 \\ -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = 12v_2,$$

$$Av_3 = \begin{pmatrix} -13+1 \\ -3+3 \\ 1+11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = 12v_3 \text{ より OK.}$$

問10. #M1-10.

$$e^A = P\underbrace{\begin{pmatrix} e^9 & & \\ & e^{12} & \\ & & e^{12}\end{pmatrix}}_{\mathcal{E}\text{として}} P^{-1}$$ となるので. $$\underbrace{e^A}_{\text{未知. }U\text{とおく.}} P = P\mathcal{E} = \overbrace{(\alpha v_1\ \ \beta v_2\ \ \beta v_3)}^{v_1 \sim v_3\text{は前頁で.}},\quad \alpha = e^9,\ \beta = e^{12}.$$

転置して $$P^T \underbrace{U^T}_{\text{未知.}} = \begin{pmatrix}\alpha v_1^T\\ \beta v_2^T\\ \beta v_3^T\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\alpha & -3\alpha & \alpha\\ \beta & \beta & 0\\ -\beta & 0 & \beta\end{pmatrix} = \mathcal{B}\text{として}$$ で. これは$\overbrace{\text{3つの連立一次eq}}^{\text{係数行列}P^T\text{が共通の}}$. であるので.

拡大係数行列
$$(P^T \mid \mathcal{B}) \xrightarrow{\text{行基本変形}} (I \mid U^T)$$ となる. よってあとはこれをまじめにやるのみ.

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} -1 & -3 & 1 & -\alpha & -3\alpha & \alpha\\ 1 & 1 & 0 & \beta & \beta & 0\\ -1 & 0 & 1 & -\beta & 0 & \beta \end{array}\right) \xrightarrow[\text{②+③}]{\text{①−③}} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & -\alpha+\beta & -3\alpha & \alpha-\beta\\ 0 & 1 & 1 & 0 & \beta & \beta\\ -1 & 0 & 1 & -\beta & 0 & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{整理}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \beta & 0 & -\beta\\ 0 & 1 & 0 & \frac{\alpha-\beta}{3} & \alpha & -\frac{\alpha-\beta}{3}\\ 0 & 1 & 1 & 0 & \beta & \beta \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{③−②}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \beta & 0 & -\beta\\ 0 & 1 & 0 & \frac{\alpha-\beta}{3} & \alpha & -\frac{\alpha-\beta}{3}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\alpha-\beta}{3} & -\alpha+\beta & \beta+\frac{\alpha-\beta}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{①+③}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \beta-\frac{\alpha-\beta}{3} & -\alpha+\beta & \frac{\alpha-\beta}{3}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{\alpha-\beta}{3} & \alpha & -\frac{\alpha-\beta}{3}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\alpha-\beta}{3} & -\alpha+\beta & \beta+\frac{\alpha-\beta}{3} \end{array}\right)$$

Iになった! U^Tなので. これを転置すれば $U = e^A$ //.