

ゲーム理論入門 -微分方程式が出てくる一例-

降旗 大介

furihata@cmc.osaka-u.ac.jp

2019.10.16

大阪大学

Game Theory

ゲーム理論とは

ゲーム理論とは「ゲーム」を調べる学問 (応用数学) で, 生物や社会の挙動とその進化 (進化ゲーム理論と呼ばれます) の (メタ) モデリングのための大変良い手法でもある. ただし, ここでいうゲームとは,

- ルール・背景があって、

ゲーム理論とは

ゲーム理論とは「ゲーム」を調べる学問 (応用数学) で, 生物や社会の挙動とその進化 (進化ゲーム理論と呼ばれます) の (メタ) モデリングのための大変良い手法でもある. ただし, ここでいうゲームとは,

- ルール・背景があって、
- 複数の「プレイヤー」が居て、

ゲーム理論とは「ゲーム」を調べる学問 (応用数学) で、生物や社会の挙動とその進化 (進化ゲーム理論と呼ばれます) の (メタ) モデリングのための大変良い手法でもある。ただし、ここでいうゲームとは、

- ルール・背景があって、
- 複数の「プレイヤー」が居て、
- それぞれの行動の「選択肢」が複数あって、

ゲーム理論とは「ゲーム」を調べる学問 (応用数学) で、生物や社会の挙動とその進化 (進化ゲーム理論と呼ばれます) の (メタ) モデリングのための大変良い手法でもある。ただし、ここでいうゲームとは、

- ルール・背景があって、
- 複数の「プレイヤー」が居て、
- それぞれの行動の「選択肢」が複数あって、
- それらの行動の結果に「利得」がある、という設定をいう。

ゲーム理論とは「ゲーム」を調べる学問 (応用数学) で、生物や社会の挙動とその進化 (進化ゲーム理論と呼ばれます) の (メタ) モデリングのための大変良い手法でもある。ただし、ここでいうゲームとは、

- ルール・背景があって、
- 複数の「プレイヤー」が居て、
- それぞれの行動の「選択肢」が複数あって、
- それらの行動の結果に「利得」がある、という設定をいう。

ゲーム理論とは

ゲーム理論とは「ゲーム」を調べる学問 (応用数学) で、生物や社会の挙動とその進化 (進化ゲーム理論と呼ばれます) の (メタ) モデリングのための大変良い手法でもある。ただし、ここでいうゲームとは、

- ルール・背景があって、
- 複数の「プレイヤー」が居て、
- それぞれの行動の「選択肢」が複数あって、
- それらの行動の結果に「利得」がある、という設定をいう。

ゲーム上では行動によってそれぞれのプレイヤーの損得が変わってくるので、

「どの選択肢をどう選ぶのか？」 = 戦略 が重要.

このため、様々な現象、状況の本質に近いゲームを調べることによって、「何が起きているのか」を知ることなどができる。



「逃げるか」「戦うか」

例: 鳩 vs 鷹 ゲーム: 状況を整理

餌などをめぐって競合相手が居る場合,
「逃げるか = ハト派」「戦うか = タカ派」,
どちらの態度を取るべきだろうか? という問.

以下のように単純化して考えてみよう.

- **ハト vs ハト**: 喧嘩にならず, 餌をわけあう.
→ 利益は少ないが、損は無い.

例: 鳩 vs 鷹 ゲーム: 状況を整理

餌などをめぐって競合相手が居る場合,
「逃げるか = ハト派」「戦うか = タカ派」,
どちらの態度を取るべきだろうか? という問.

以下のように単純化して考えてみよう.

- **ハト vs ハト**: 喧嘩にならず, 餌をわけあう.

→ 利益は少ないが、損は無い.

- **タカ vs タカ**: 喧嘩.

→ 餌もとれるが、ダメージもくらう.

例: 鳩 vs 鷹 ゲーム: 状況を整理

餌などをめぐって競合相手が居る場合,
「逃げるか = ハト派」「戦うか = タカ派」,
どちらの態度を取るべきだろうか? という問.

以下のように単純化して考えてみよう.

- **ハト vs ハト** : 喧嘩にならず, 餌をわけあう.
→ 利益は少ないが、損は無い.
- **タカ vs タカ** : 喧嘩.
→ 餌もとれるが, ダメージもくらう.
- **タカ vs ハト** : ハトは逃げる.
→ タカが利益を独り占め. ハトは何も得られず.

例: 鳩 vs 鷹 ゲーム: 状況を整理

餌などをめぐって競合相手が居る場合,
「逃げるか = ハト派」「戦うか = タカ派」,
どちらの態度を取るべきだろうか? という問.

以下のように単純化して考えてみよう.

- **ハト vs ハト** : 喧嘩にならず, 餌をわけあう.
→ 利益は少ないが、損は無い.
- **タカ vs タカ** : 喧嘩.
→ 餌もとれるが, ダメージもくらう.
- **タカ vs ハト** : ハトは逃げる.
→ タカが利益を独り占め. ハトは何も得られず.

例: 鳩 vs 鷹 ゲーム: 状況を整理

餌などをめぐって競合相手が居る場合,
「逃げるか = ハト派」「戦うか = タカ派」,
どちらの態度を取るべきだろうか? という問.

以下のように単純化して考えてみよう.

- **ハト vs ハト**: 喧嘩にならず, 餌をわけあう.
→ 利益は少ないが、損は無い.
- **タカ vs タカ**: 喧嘩.
→ 餌もとれるが, ダメージもくらう.
- **タカ vs ハト**: ハトは逃げる.
→ タカが利益を独り占め. ハトは何も得られず.

これだけだとよくわからないので, **定量化して**評価を試みる.

例: 鳩 vs 鷹 ゲーム: 利得表にしてみる

個体 A, B が, ハト的態度 (P), タカ的態度 (H) を取った時のそれぞれの**利得**がどうなるか仮定して表にしてみる.

Table 1: 利得表. 左が A の利得, 右が B の利得.

↓個体 A →個体 B	ハト (P)	タカ (H)
ハト (P)	1, 1	0, 2
タカ (H)	2, 0	-2, -2

* 餌は 利得 2. 半分にすると 1.

* 喧嘩すると -3 のダメージ.

* 赤字は A にとって「利得がより高い」選択肢, 青字は B にとって.

さて, 何が起きるのか?

タカ派がほとんどの集団では何が起きるか

分かりやすいように、極端なケースを見てみよう。

まず、「集団のほとんどがタカ派の場合」何が起きるか。集団の中のタカ派の割合を x として (例えば 99% の時は $x = 0.99$),

$$\text{餌のところにやってきた 2 匹が} \begin{cases} \text{両方 H の確率} & = x^2, \\ \text{両方 P の確率} & = (1-x)^2, \\ \text{H, P の確率} & = 2x(1-x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{H 集団の期待利得 } G_H & = 2 \cdot (-2) \cdot x^2 + 2 \cdot 2x(1-x) = 4x(1-2x), \\ \text{P 集団の期待利得 } G_P & = 2 \cdot 1 \cdot (1-x)^2 = 2(1-x)^2, \end{cases}$$

$$\Rightarrow G_H < 0 < G_P \quad (x \cong 1 \text{ の場合})$$

となり、H 集団は小さくなっていく (P は少しずつ増える)。つまり、

ほぼタカ派で構成されている集団はハト派の侵入に弱い = 不安定。

ハト派がほとんどの集団では？

$$\begin{cases} \text{H 集団の期待利得 } G_H & = 2 \cdot (-2) \cdot x^2 + 2 \cdot 2x(1-x) = 4x(1-2x), \\ \text{P 集団の期待利得 } G_P & = 2 \cdot 1 \cdot (1-x)^2 = 2(1-x)^2, \end{cases}$$

という計算までは同じ。今度はタカ派の割合 x が $x \cong 0$ で、利得はそれぞれ

$$0 < G_H, \quad 0 < G_P$$

で両方プラス。差を見るには各集団の大きさを割って**一匹あたりの利得相当**を計算して、

$$\begin{cases} \text{タカ一匹の期待利得 } G_H/Nx & = 4(1-2x)/N, \\ \text{ハト一匹の期待利得 } G_P/N(1-x) & = 2(1-x)/N, \end{cases}$$

なので (N はトリ全部の数)

$$0 < \frac{G_P}{N(1-x)} \cong \frac{2}{N} < \frac{G_H}{Nx} \cong \frac{4}{N},$$

となり、**タカの方がハトのほぼ倍の餌をとれるので**、やはり

ほぼハト派で構成されている集団もタカ派の侵入に弱い = 不安定.

ハト vs タカの安定な比率がある？

そう，有るのだ．

ハト，タカの一匹あたりの期待利得が一致 = とれる餌の量が一致

$$\iff x = \frac{1}{3}$$

なので，

タカ派の割合が $1/3$ の時，集団は安定する

ことになる．

- 態度を変えるケースでは、トリは **ランダムに 3 回に 1 回** タカ派の態度をとることになる。

← なぜランダム？ ずっとタカ派だと損するシーンがあるのでハト派の態度も時々とりたいが、ハト派の態度をとることが相手に先に読まれてしまったら相手が必ずタカ派行動をとってしまい意味が無いので、**相手に行動が読まれないことが重要**。

1/3 という数字の意味することは？

- 態度を変えるケースでは、トリは **ランダムに 3 回に 1 回** タカ派の態度をとることになる。
← なぜランダム？ ずっとタカ派だと損するシーンがあるのでハト派の態度も時々とりたいが、ハト派の態度をとることが相手に先に読まれてしまったら相手が必ずタカ派行動をとってしまい意味が無いので、**相手に行動が読まれないことが重要**.
- 態度を変えないケースでは、集団中のタカ派のトリが $1/3$ の割合で、ハト派のトリが $2/3$ の割合になる。
→ 行動様式の変離が安定化する。こうした変離が種の変離へ繋がる？

1/3 という数字の意味することは？

- 態度を変えるケースでは、トリは **ランダムに 3 回に 1 回** タカ派の態度をとることになる。
← なぜランダム？ ずっとタカ派だと損するシーンがあるのでハト派の態度も時々とりたいが、ハト派の態度をとることが相手に先に読まれてしまったら相手が必ずタカ派行動をとってしまい意味が無いので、**相手に行動が読まれないことが重要**.
- 態度を変えないケースでは、集団中のタカ派のトリが $1/3$ の割合で、ハト派のトリが $2/3$ の割合になる。
→ 行動様式の変離が安定化する。こうした変離が種の変離へ繋がる？

1/3 という数字の意味することは？

- 態度を変えるケースでは、トリは **ランダムに 3 回に 1 回** タカ派の態度をとることになる。
← なぜランダム？ ずっとタカ派だと損するシーンがあるのでハト派の態度も時々とりたいが、ハト派の態度をとることが相手に先に読まれてしまったら相手が必ずタカ派行動をとってしまい意味が無いので、**相手に行動が読まれないことが重要**.
- 態度を変えないケースでは、集団中のタカ派のトリが 1/3 の割合で、ハト派のトリが 2/3 の割合になる。
→ 行動様式の変離が安定化する。こうした変離が種の変離へ繋がる？

などがまずは考えられる。

* もちろん、「このゲームの設定がそもそも単純過ぎる」ので、**ただちに直接の結論へと導くのは危険！** だが。

変化を追いかけると？

次のような連立微分方程式を得ることになる (病気とか寿命とか死亡とか考えていない, 乱暴なモデル).

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = C_1 \cdot (G_H/h) \cdot C_2 \cdot h = C_1 C_2 \frac{4h(p-h)}{(h+p)^2}, \\ \frac{dp}{dt} = C_1 \cdot (G_P/p) \cdot C_2 \cdot p = C_1 C_2 \frac{2p^2}{(h+p)^2}. \end{cases}$$

ただし,

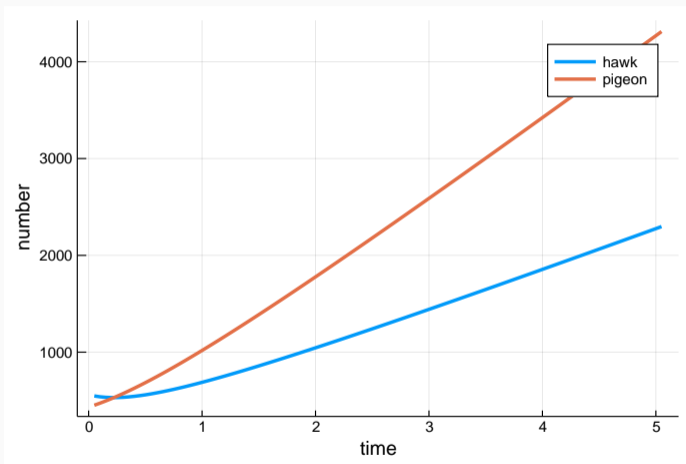
$$\text{タカ派個体数 } h(t) = Nx(t),$$

$$\text{ハト派個体数 } p(t) = N(1-x(t)),$$

$$C_1 = \text{時間あたりの餌発見数},$$

$$C_2 = \text{時間あたりの一羽の産卵数}.$$

微分方程式の数値解の例



$C_1 \cdot C_2 = 1.0$, 初期値 $h(0) = 548$, $p(0) = 452$ で計算した例.

$h(T) \cong 2297$, $p(T) = 4311$ で, $h/(h+p)|_T \cong 0.348$ となり, おおよそ $1/3$ に近づいている.

ゲームの解析で期待することは？

こうした「おもちゃ的なゲーム」でも、本質的に絡んでくるファクターやプレイヤーを注意深く選択・増やしたりしていけばそれなりに「ホンモノの」意味が出てくる可能性がある。

…というか、今ではこれは「当然扱い」で、膨大な研究があるわけだが。

他にも例えば、動物が**ケンカを「見物」する理由**などは、このゲームに見物というファクターを追加するとわかるかも。

その他ゲーム理論で考えることは？

まあ、列挙だけしておく以下の様な感じ.

- **状況はすべて把握できるか？** (情報完全性)

→ 本質的な情報でわからないことがあるかどうか. 例えば, 食べられる餌かどうか不明な状態でそれを巡ってどこまで争うか?

その他ゲーム理論で考えることは？

まあ、列挙だけしておくのと以下の様な感じ.

■ 状況はすべて把握できるか？ (情報完全性)

→ 本質的な情報でわからないことがあるかどうか. 例えば, 食べられる餌かどうか不明な状態でそれを巡ってどこまで争うか？

■ 相手と情報交換や交渉はアリか？ (協力ゲーム vs 非協力ゲーム)

→ 事前に情報交換できるだけでもゲームの行方は変わってくる. 交渉ありならばなおさら.

その他ゲーム理論で考えることは？

まあ、列挙だけしておくのと以下の様な感じ.

■ 状況はすべて把握できるか？ (情報完全性)

→ 本質的な情報でわからないことがあるかどうか. 例えば, 食べられる餌かどうか不明な状態でそれを巡ってどこまで争うか？

■ 相手と情報交換や交渉はアリか？ (協力ゲーム vs 非協力ゲーム)

→ 事前に情報交換できるだけでもゲームの行方は変わってくる. 交渉ありならばなおさら.

■ 情報交換や交渉にウソはアリか？

→ 特に交渉での約束を破っていいとなると, どのような影響があるだろうか. 数学的にその影響は見積もれるか？

その他ゲーム理論で考えることは？

まあ、列挙だけしておくのと以下の様な感じ.

■ 状況はすべて把握できるか？ (情報完全性)

→ 本質的な情報でわからないことがあるかどうか. 例えば, 食べられる餌かどうか不明な状態でそれを巡ってどこまで争うか？

■ 相手と情報交換や交渉はアリか？ (協力ゲーム vs 非協力ゲーム)

→ 事前に情報交換できるだけでもゲームの行方は変わってくる. 交渉ありならばなおさら.

■ 情報交換や交渉にウソはアリか？

→ 特に交渉での約束を破っていいとなると, どのような影響があるだろうか. 数学的にその影響は見積もれるか？

■ ゲーム理論を逆に用いて利得そのものを推測したいですよ？

→ 原理的には信頼出来る比較「実験」のデータがあるならば可能だが…
プレイヤー個体を1つに固定してなら, まあ無理なく可能 (利得の定量化).

まあ、列挙だけしておく以下の様な感じ.

■ そもそも全体は安定するか？

戦略を変化させることで利を得ることが可能な場合が多い.

→ **進化ゲーム理論**へ.

まあ、列挙だけしておく以下の様な感じ。

■ そもそも全体は安定するか？

戦略を変化させることで利を得ることが可能な場合が多い。

→ **進化ゲーム理論**へ。

■ 先を読むことはほんとうに正しいか？

→ 例えば「今週のどれかの平日に抜き打ち試験をやります」問題では、下手な推論を行うと抜き打ち試験がそもそもできなくなる。これは、「金曜まで試験をしないと金曜だとバレてしまうので、抜き打ちにならない。よって金曜はなし」、「同様に木曜も無し」… と後ろから推論をおこなうとそうなる。

ゲーム理論でも、複数かつ有限回のゲームでは同様の推論が可能だが、それは果たして**意味がある**だろうか？

まあ、列挙だけしておく以下の様な感じ。

■ そもそも全体は安定するか？

戦略を変化させることで利を得ることが可能な場合が多い。

→ **進化ゲーム理論**へ。

■ 先を読むことはほんとうに正しいか？

→ 例えば「今週のどれかの平日に抜き打ち試験をやります」問題では、下手な推論を行うと抜き打ち試験がそもそもできなくなる。これは、「金曜まで試験をしないと金曜だとバレてしまうので、抜き打ちにならない。よって金曜はなし」、「同様に木曜も無し」… と後ろから推論をおこなうとうなる。

ゲーム理論でも、複数かつ有限回のゲームでは同様の推論が可能だが、それは果たして**意味がある**だろうか？

■ プレイヤーの数が増えてきた時、どう考えればよい？

→ こうくればこうする… という考え方で解析をするには限界がある。数学的な手法が必要だが、どうすれば良いだろうか？

有名な例: 囚人ゲーム

逮捕された犯罪者 A, B が, 自白 (裏切り H), 黙秘 (協力 P) の行動をとったとき, それぞれの**利得**がどうなるかを表であらわす.

Table 2: 利得表. 左が A の利得, 右が B の利得.

↓ A → B	自白 (H)	黙秘 (P)
自白 (H)	1, 1	7, 0
黙秘 (P)	0, 7	2, 2

* 二人とも黙秘すると見つからない証拠があるので刑は軽め (利得はどちらも 2).

* 二人とも自白すると証拠が見つかるので重罪での判決だが, 自白した分少し軽くなる (利得は少し減ってどちらも 1).

* 片方だけ自白 (裏切り) すると「司法取引」で釈放され, 黙秘した方は重罪で重い刑を受ける (裏切った方の利得は 7 で黙秘した方は利得無し).

さて, どうすべきか?