モデリング 古典 3 題

降旗 大介

人口問題

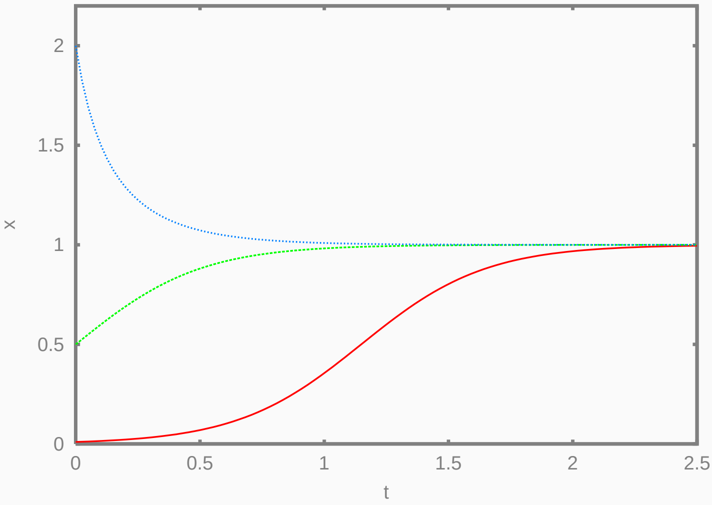
簡単なモデル

人口問題とは⋯人口の経時変化を理解，予想すること.

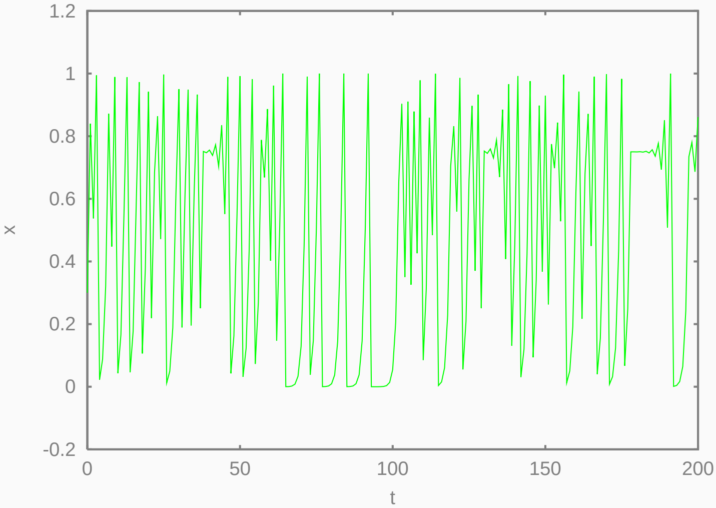
1. マルサスモデル $$\frac{du}{dt} = \gamma u$$
   - 増大率が比例する
   - いずれ破綻する
2. ロジスティックモデル $$\frac{du}{dt} = \gamma u \times (-1)(u - u_{\max})$$
   - 増大率が抑えられている
   - (連続) 解はいずれ $u_{\max}$ に収束する
   - 変数分離法で厳密解が計算できる (→ 厳密解法へ).
   - 離散化すると (数値計算の段階へ繋がる)，その方法によっては「カオスが発生する」

0504-J

ロジスティックモデルの厳密解



ロジスティックモデルの離散解



戦闘問題

ランチェスターモデル

戦闘問題とは… 戦闘に伴う兵力の経時変化を理解すること.

$\boxed{\text{ランチェスターの戦闘モデル}}$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} & = & -C_b v + f_a(t), \\ \dfrac{dv}{dt} & = & -C_a u + f_b(t) \end{cases}$$

A 軍兵力: $u(t)$, B 軍兵力: $v(t)$. (戦闘効率係数: C_a,C_b, 補給率: f_a,f_b)

0505-J

簡単のために $f_a = f_b = 0$ とする.

第一式に $C_a u$ を，第二式に $C_b v$ をかけて，等式の両辺を積分すると…

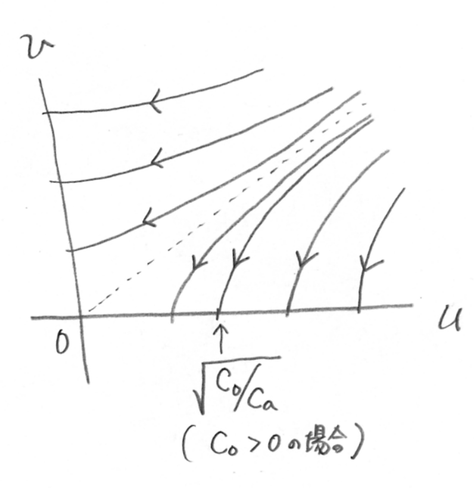
$\boxed{\text{ランチェスターの二乗則}}$

$$C_a u^2 - C_b v^2 = C_0$$

- 1916 年: 第一次大戦の時代
- 戦闘における兵力の「効き方」を表す

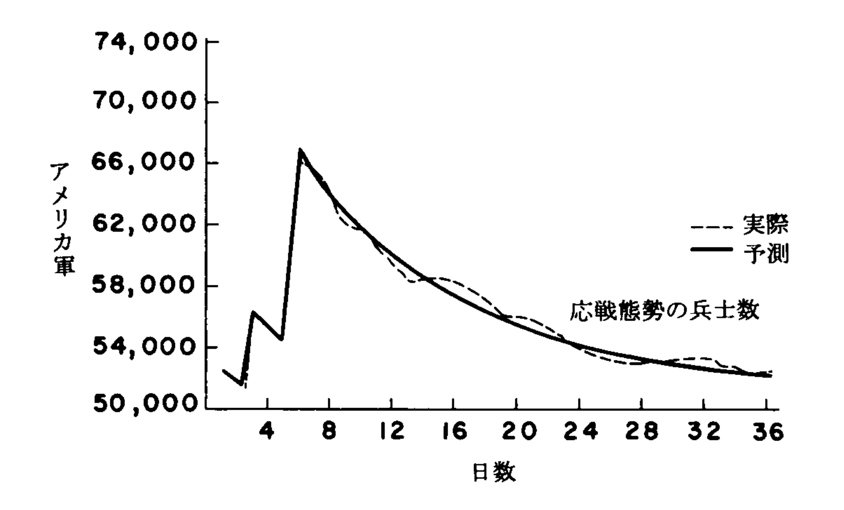
0505-J

ランチェスター二乗則の意味



二乗則より分かる全体の様子

ランチェスターモデルと現実

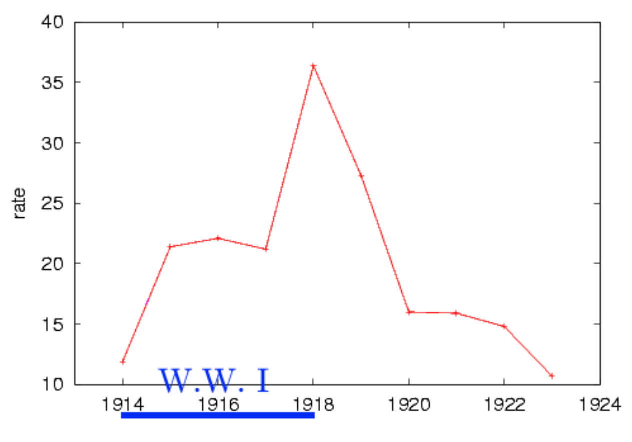


1945 年の硫黄島での米軍兵力

被食者捕食者問題

実際の例

被 | 補食 関係にある生物の経時変化を理解したい



地中海のある港における漁獲高中の軟骨魚の割合

- 上の例をどう理解するか?

Volterra モデル

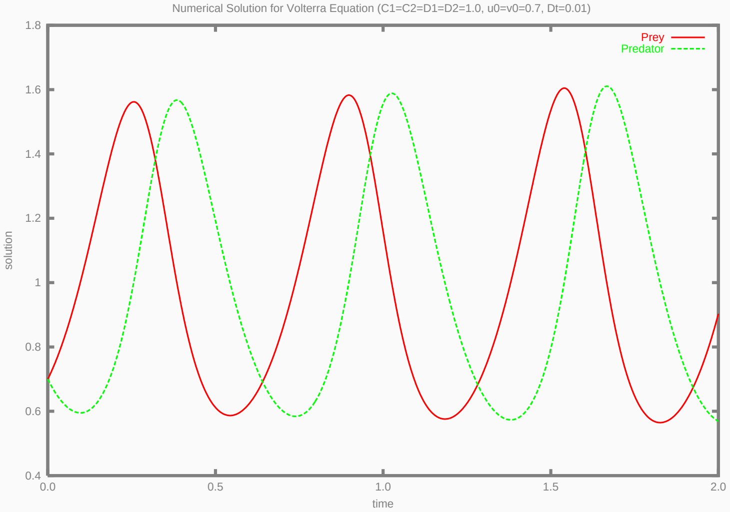
Volterra の披食者–捕食者モデル

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} & = & -C_1 uv + D_1 u \\ \dfrac{dv}{dt} & = & C_2 uv - D_2 v \end{cases}$$

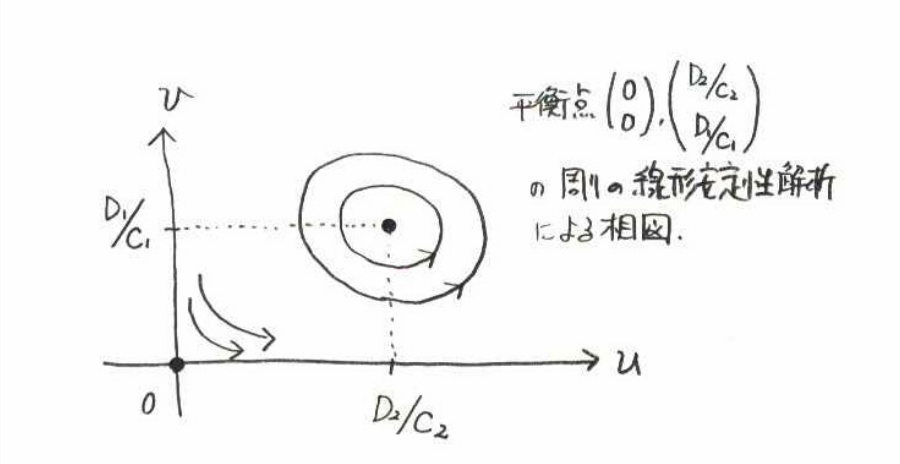
披食者 (食用魚): $u(t)$, 捕食者 (軟骨魚): $v(t)$

0506-J

Volterra モデルの数値解例

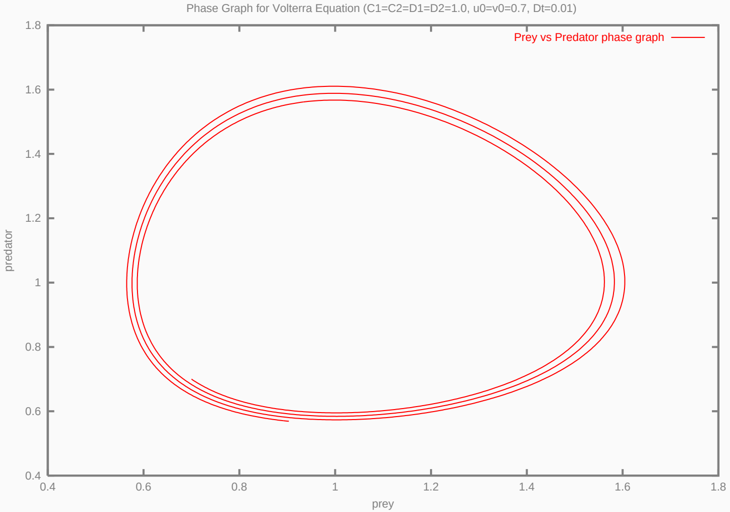


$C_1 = C_2 = D_1 = D_2 = 1.0,\ u(0) = v(0) = 0.7,\ \Delta t = 0.01.$ Euler スキームによる.



Volterra のモデル方程式の平衡点周りを線形安定性解析によって見た相図

Volterra モデルの数値解の相図



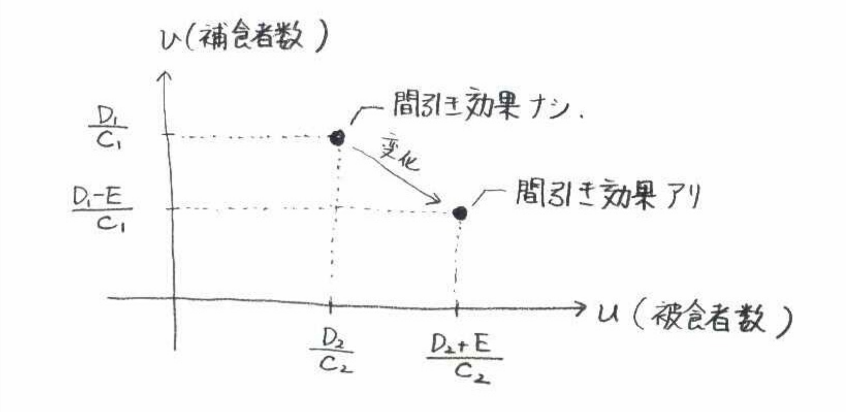
Volterra のモデル方程式の数値解を相図にしたもの

Volterra モデルでの漁業影響

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -C_1uv + D_1u - Eu \\ \dfrac{dv}{dt} = C_2uv - D_2v - Ev \end{cases}$$

- 食用魚，軟骨魚ともに一定の間引きの効果
- 結果，相図の平衡点が変化する

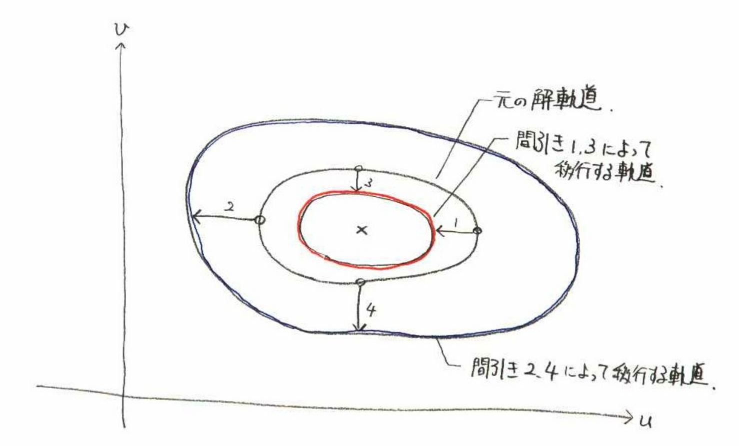
0506-J



Volterra の原理 – 漁業による全体間引き効果が上のように現れる

- 披食者の平均値は増える ← 驚きである
- 捕食者の平均値は減る

Volterra モデルの種別漁業影響



披食者か捕食者だけを狙い撃ちして間引けば?

- 少ないときに間引くとかえって振幅が増える ← 直感の逆!