Daisuke Furihata

(KdV eq. を題材にして
有限要素法を
解説.)

(finite element method
(FEM))

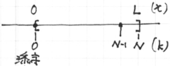
KdV eq. は

$u_t + uu_x + \varepsilon^2 u_{xxx} = 0$

を想定.

$x \in [0, L]$ として
周期的B.C.で考える.

x を $\Delta x = L/N$ で分割して、



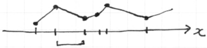
$k = 0 \sim N-1$ を
考えると良い.

(つまり、
$u(N\Delta x) = u(0\Delta x)$
$u(-\Delta x) = u((N-1)\Delta x)$
とする)

FEM とは.

① 小さな領域(要素)上で単純な函数で解を近似する.

例.



1次元: 区間を要素とし、その上では線分で解を近似する
(折れ線近似).

② 弱形式(後述)を用いて、①の近似でも微分が出来るところまで微分階数を下げる.

例. 上の①の例だと、$\frac{\partial}{\partial x}$ は1階までなので、x微分が1階になるまで弱形式(と新変数導入)で以下のようにがんばる.

!弱形式とは!

方程式を $f(u)=0$ と書くとして、

$$f(u)=0 \Rightarrow \int_\Omega \{f(u) \times v(x)\}\, dx = 0 \quad \text{for } \forall v \in \text{適当な函数集合} T$$

なのは確かなので、ここで思い切って、

$$(*) \quad \int_\Omega f(u)\, v \, dx = 0 \quad \text{for } \forall v \in T$$

(← これを弱形式(の手前)という かな…)

を満たす u を弱解と呼んで解の代わり/近似とする.
この時、例えば $f(u)$ に u_{xx} などの項が含まれているならば、

$$\int_\Omega u_{xx} \cdot v \, dx = \underbrace{[u_x v]_{\partial\Omega}}_{\text{部分積分}} - \int_\Omega u_x v_x \, dx$$

← この右辺側が弱形式.

と変形でき、この右側には1階微分しか存在しないので、見かけ上、微分階数を下げられることになる.

よって、こうして(*)を変形した結果を弱形式とよんで、
これを解く(近似)ことを考える.

(続き)

よって、KdV の場合は、まず全体の見かけの微分階数を2階以下にするべく、新変数を導入して次のようにする。

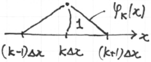
$$
\text{KdV eq.} :\Leftrightarrow \begin{cases} u_t + uu_x + \varepsilon^2 w_x = 0, \\ w = u_{xx} \end{cases} \qquad (2.1)
$$

そしてこれの弱形式を作る。　ただし、$(a,b) := \int_\Omega ab\,dx$.

$$
\text{弱形式 of (2.1)} \begin{cases} (u_t, v) + (uu_x, v) + \varepsilon^2 (w_x, v) = 0 \quad \text{for } {}^\forall v \in T \\ = \quad 〃 \quad + \quad 〃 \quad - \varepsilon^2 (w, v_x), \qquad (2.2a) \\ 0 = (w - u_{xx}, v) = (w, v) - (u_{xx}, v) \\ \qquad = (w, v) + (u_x, v_x) \quad \text{for } {}^\forall v \in T. \qquad (2.2b) \end{cases}
$$

③ u や v を ①に基いて 離散近似して、②の弱形式を近似する。

例. たとえば、



とすると、①の折れ線は

$$
u(x, t) \simeq \sum_{k=0}^{N-1} u_k(t)\, \varphi_k(x)
$$

x と t が分離したコトに注意.

と近似できる。

v や w も同様に考えるとすると、$\left(\Leftrightarrow T = \left\{ \{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{N-1} \text{の線形結合} \right\}\right)$

$$
\begin{aligned}
(2.2a) \to 0 &= \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{du_k}{dt} \varphi_k, \sum_{l=0}^{N-1} v_l \varphi_l \right) + \left(\sum_{k=0}^{N-1} u_k \varphi_k \left(\sum_{s=0}^{N-1} u_s \frac{d\varphi_s}{dx} \right), \sum_{l=0}^{N-1} v_l \varphi_l \right) \\
&\quad - \varepsilon^2 \left(\sum_{k=0}^{N-1} w_k \varphi_k, \sum_{l=0}^{N-1} v_l \frac{d\varphi_l}{dx} \right) \\
&= \sum_l v_l \sum_k \left\{ (\varphi_l, \varphi_k) \frac{du_k}{dt} + \left(\sum_s u_s (\varphi_l, \zeta_s \varphi_k) \right) u_k - \varepsilon^2 (\zeta_l, \varphi_k) w_k \right\} \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

where $\zeta_k(x) := \dfrac{d\varphi_k}{dx}$.

Daisuke Furihata

同様に、

$$(2.2b) \rightarrow 0 = \sum_{l} v_l \left\{ \sum_k (\varphi_l, \varphi_k) w_k + (\zeta_l, \zeta_k) u_k \right\} \quad (3.1).$$

選点法的な考え方.

→ そして、v_l は任意なので、(2.3) = 0, (3.1) = 0 は結局次を意味する。

$$(2.3) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ (\varphi_l, \varphi_k) \frac{du_k}{dt} + \left(\sum_{s=0}^{N-1} u_s (\varphi_l, \zeta_s \varphi_k) \right) u_k - \varepsilon^2 (\zeta_l, \varphi_k) w_k \right\} = 0 \quad \text{for } l = 0, 1, \ldots, N-1. \quad (3.2)$$

$$(3.1) \Leftrightarrow \sum_k \left\{ (\varphi_l, \varphi_k) w_k + (\zeta_l, \zeta_k) u_k \right\} = 0 \quad \text{for } l = 0, 1, \cdots, N-1. \quad (3.3)$$

そして、$\Phi_{lk} := (\varphi_l, \varphi_k)$, $\varphi_{lk}(u) := \sum_{s=0}^{N-1} u_s (\varphi_l, \zeta_s \varphi_k)$,

$D_{1,lk} := (\zeta_l, \varphi_k)$, $D_{2,lk} := (\zeta_l, \zeta_k)$ とおくと、

$$\begin{cases} (3.1) \Leftrightarrow \underset{\text{matrix}}{\Phi} \dfrac{du}{dt} + \underset{\text{matrix}}{\varphi(u)}\, u - \varepsilon^2 \underset{\text{matrix}}{D_1} w = 0 & (3.4a) \\ (3.2) \Leftrightarrow \Phi w + D_2 u = 0 & (3.4b). \end{cases}$$

(3.4b) より $w = -\Phi^{-1} D_2 u$ と書けるのでこれを (3.4a) に代入すると、結局、

$$(3.4a) \& (3.4b) \Leftrightarrow \boxed{\Phi \frac{du}{dt} = -\varphi(u) u - \varepsilon^2 D_1 \Phi^{-1} D_2 u} \quad (3.5)$$

これが FEM スキーム
（半離散）

を得る。

あとは $\dfrac{du}{dt}$ がかかることから、Runge-Kutta etc. で良い。

上の Φ や φ は？
→ まじめに「手」計算が可能。(おすすめはしないが)

やってみると、

$$\Phi = \Delta x \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & & 0 & 1/6 \\ 1/6 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & \ddots & & 1/6 \\ 1/6 & 0 & & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix} \quad (\text{対称行列})$$

$$\varphi(u) = \begin{pmatrix} \frac{u_1 - u_{N-1}}{3} & \frac{u_1 - u_0}{6} & 0 & \cdots & 0 & \frac{u_0 - u_{N-1}}{6} \\ \frac{u_1 - u_0}{6} & \frac{u_2 - u_0}{3} & \frac{u_2 - u_1}{6} & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \frac{u_{N-1} - u_{N-2}}{6} \\ \frac{u_0 - u_{N-1}}{6} & 0 & & & \frac{u_{N-1} - u_{N-2}}{6} & \frac{u_0 - u_{N-2}}{3} \end{pmatrix} \quad (\text{対称行列})$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & & & 1/2 \\ 1/2 & \ddots & \ddots & 0 & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & 0 & \ddots & & -1/2 \\ -1/2 & & & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{歪対称行列})$$

$$D_2 = \frac{1}{\Delta x} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & 0 & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & 0 & \ddots & & -1 \\ -1 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{対称行列})$$

となる。
（大変！）