

モデリング 古典 3 題

降旗 大介

簡単なモデル

人口問題

簡単なモデル

ロジスティックモデルの厳密解

ロジスティックモデルの離散解

戦闘問題

被食者-捕食者問題

人口問題とは…人口の経時変化を理解, 予想すること.

1. マルサスモデル $\frac{du}{dt} = \gamma u$

- 増大率が比例する
- いずれ破綻する

2. ロジスティックモデル $\frac{du}{dt} = \gamma u \times (-1)(u - u_{\max})$

- 増大率が抑えられている
- (連続) 解はいずれ u_{\max} に収束する
- 変数分離法で厳密解が計算できる (→ 厳密解法へ).
- 離散化すると (数値計算の段階へ繋がる), その方法によっては「カオスが発生する」

ロジスティックモデルの厳密解

人口問題

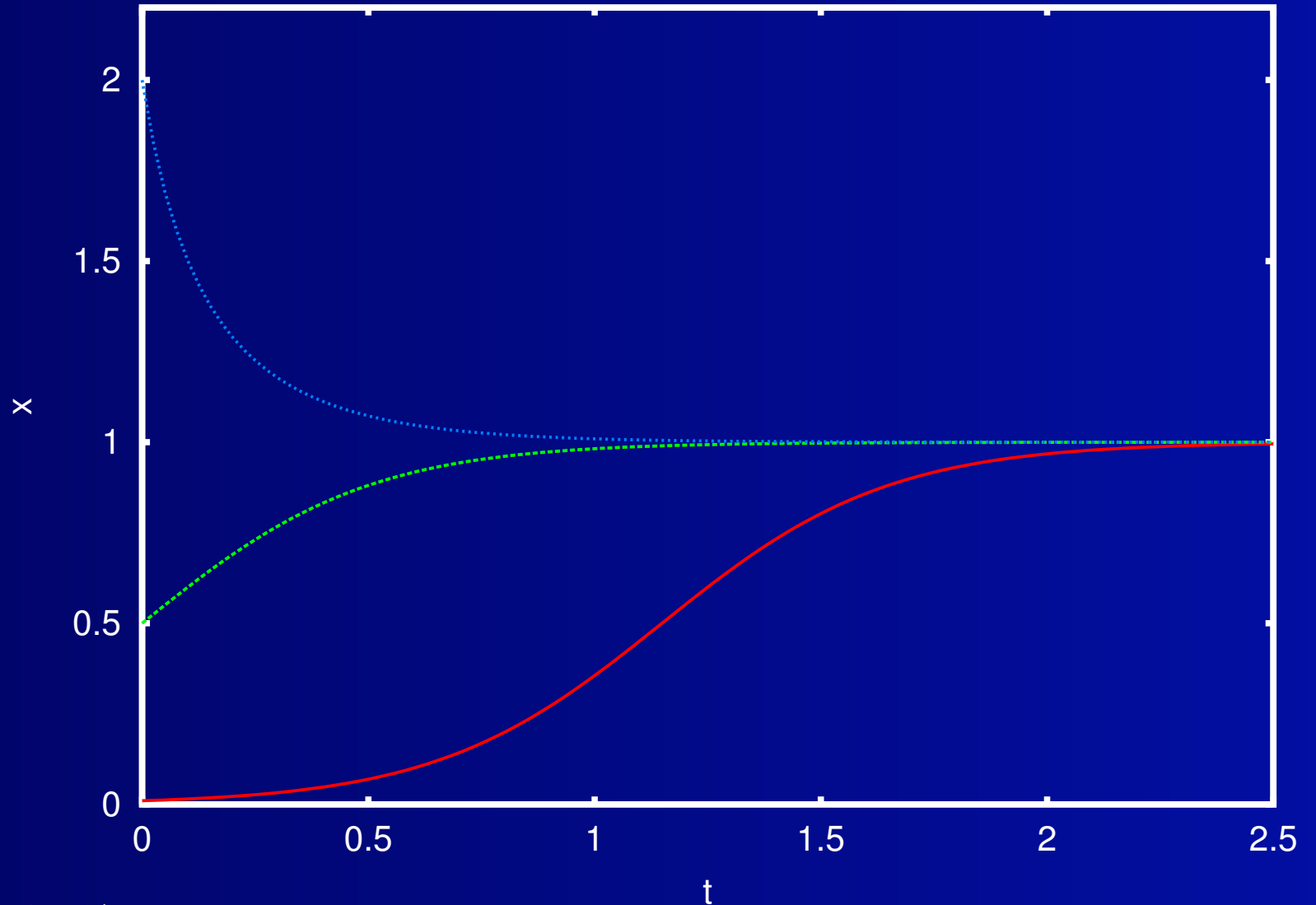
簡単なモデル

ロジスティックモデルの厳密解

ロジスティックモデルの離散解

戦闘問題

被食者-捕食者問題



ロジスティックモデルの離散解

人口問題

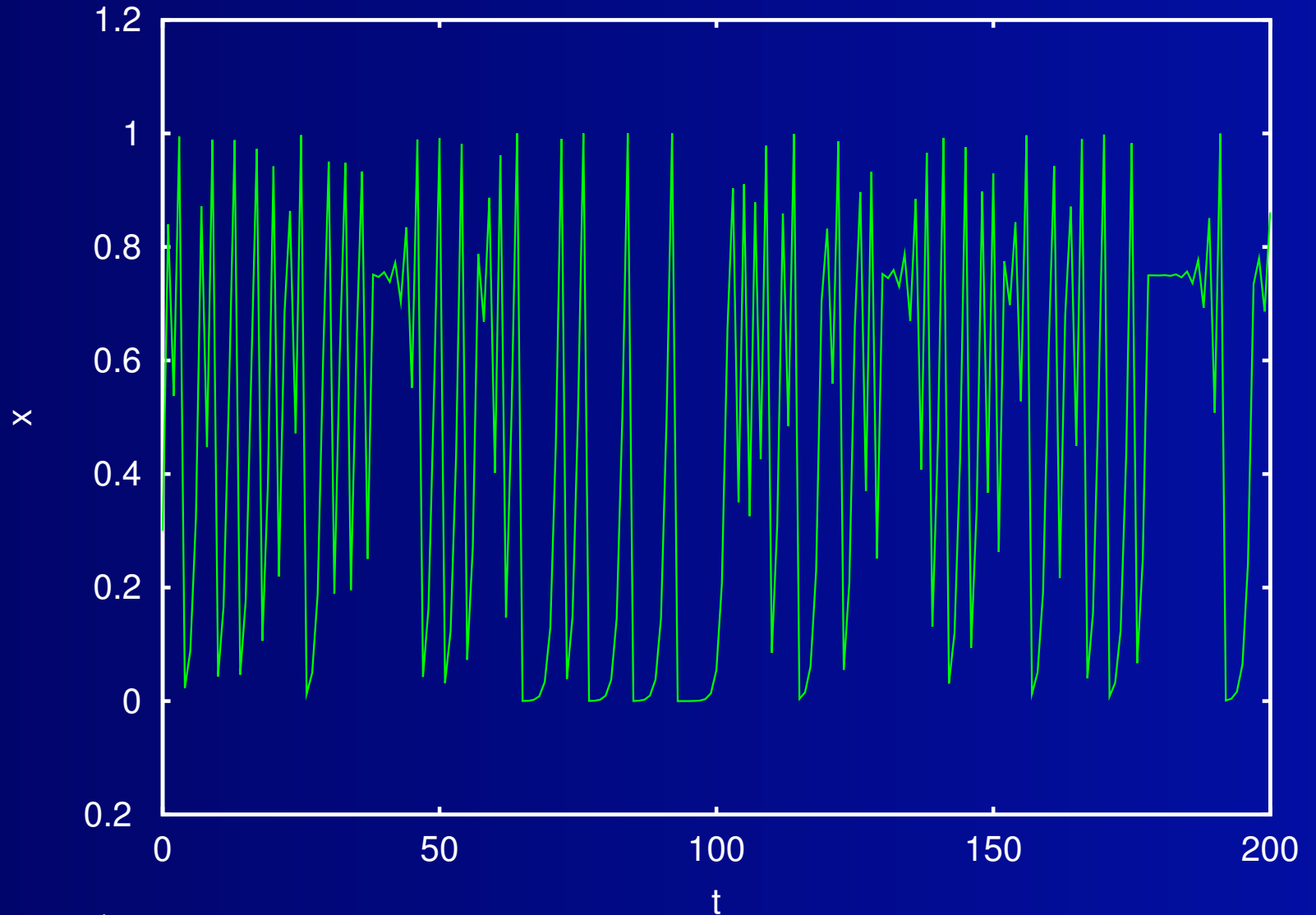
簡単なモデル

ロジスティックモデルの厳密解

ロジスティックモデルの離散解

戦闘問題

被食者-捕食者問題



ランチェスターモデル

戦闘問題とは… 戦闘に伴う兵力の経時変化を理解すること.

ランチェスターの戦闘モデル

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -C_b v + f_a(t), \\ \frac{dv}{dt} &= -C_a u + f_b(t)\end{aligned}$$

A 軍兵力: $u(t)$, B 軍兵力: $v(t)$. (戦闘効率係数: C_a, C_b , 補給率: f_a, f_b)

人口問題

戦闘問題

ランチェスターモデル

ランチェスターモデルの解析

ランチェスター二乗則の意味

ランチェスターモデルと現実

被食者-捕食者問題

ランチェスターモデルの解析

人口問題

戦闘問題

ランチェスターモデル

ランチェスターモデルの解析

ランチェスター二乗則の意味

ランチェスターモデルと現実

被食者-捕食者問題

簡単のために $f_a = f_b = 0$ とする.

第一式に $C_a u$ を, 第二式に $C_b v$ をかけて, 等式の両辺を積分すると...

ランチェスターの二乗則

$$C_a u^2 - C_b v^2 = C_0$$

- 1916年: 第一次大戦の時代
- 戦闘における兵力の「効き方」を表す

ランチェスター二乗則の意味

人口問題

戦闘問題

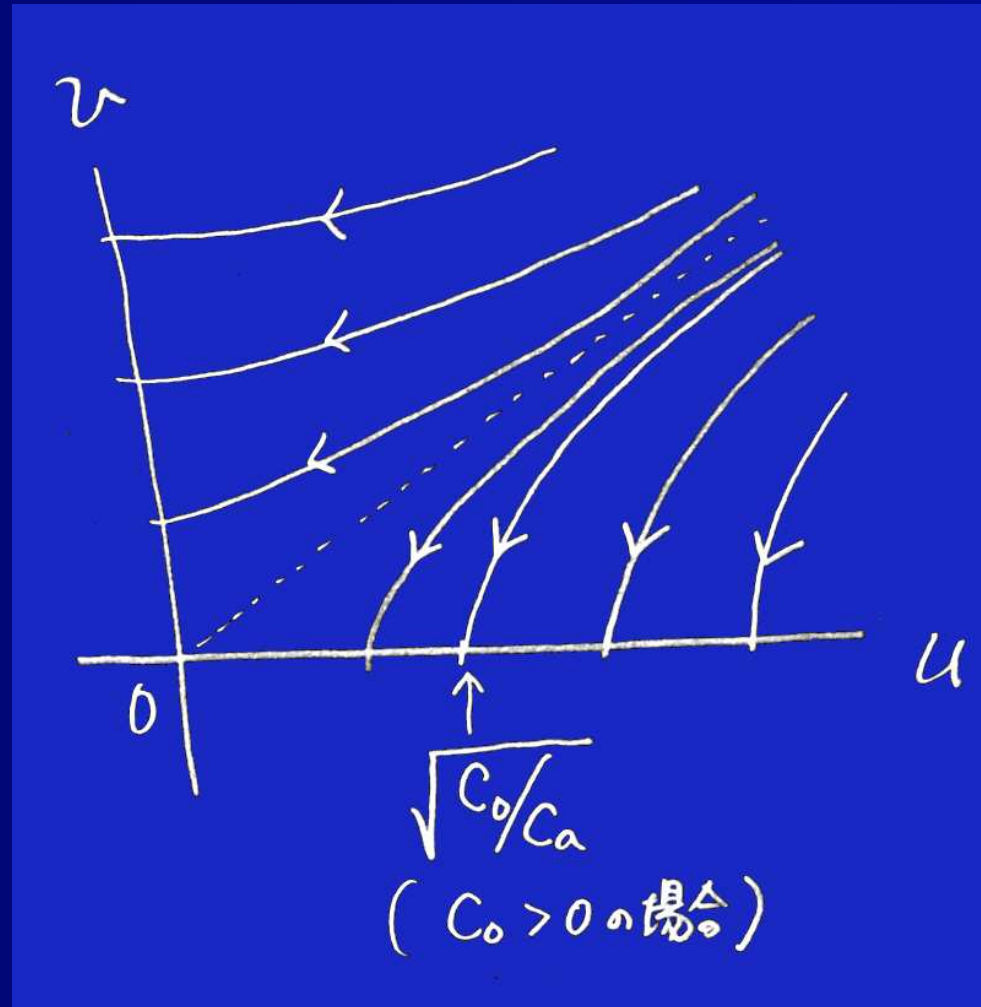
ランチェスターモデル

ランチェスターモデルの解析

ランチェスター二乗則の意味

ランチェスターモデルと現実

被食者-捕食者問題



二乗則より分かる全体の様子

ランチェスターモデルと現実

人口問題

戦闘問題

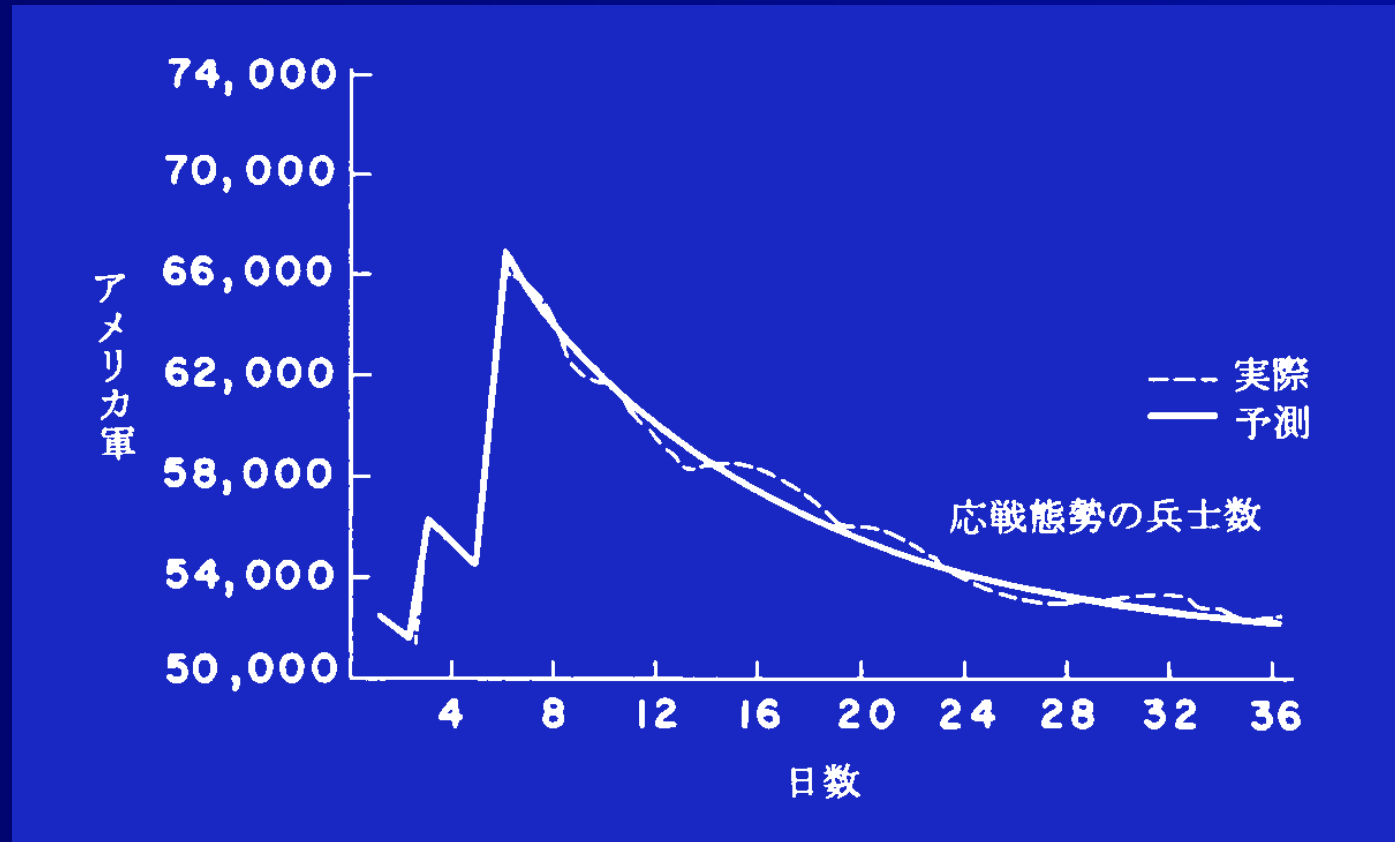
ランチェスターモデル

ランチェスターモデルの解析

ランチェスター二乗則の意味

ランチェスターモデルと現実

被食者-捕食者問題



1945年の硫黄島での米軍兵力

実際の例

被 | 補食 関係にある生物の経時変化を理解したい

人口問題

戦闘問題

被食者-捕食者問題

実際の例

Volterra モデル

Volterra モデルの数値解例

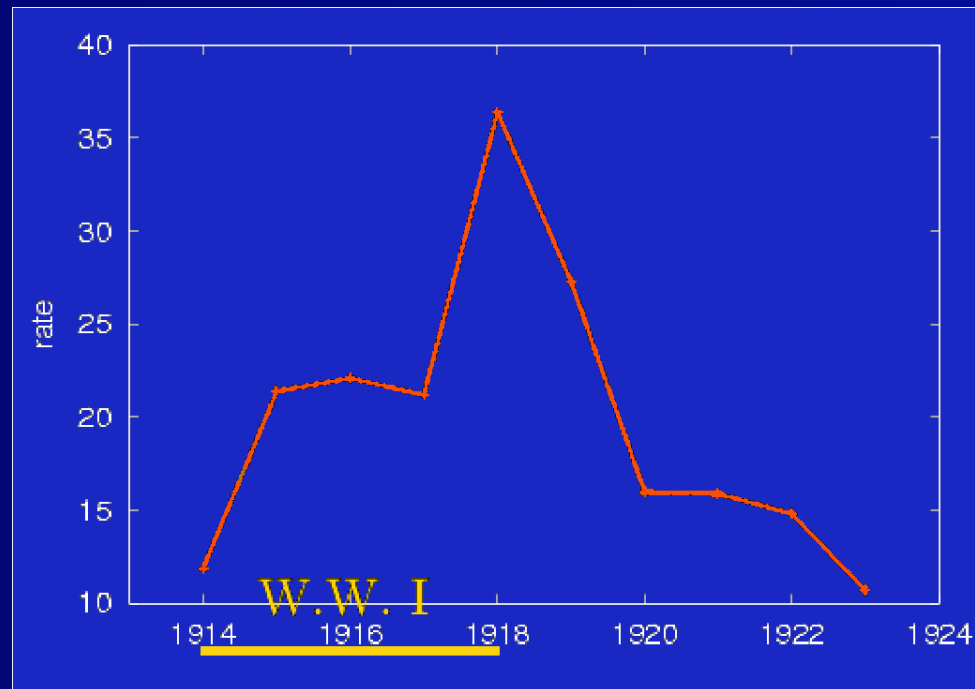
Volterra モデルの相図

Volterra モデルの数値解の相図

Volterra モデルでの漁業影響

Volterra モデルの漁業影響

Volterra モデルの種別漁業影響



地中海のある港における漁獲高中の軟骨魚の割合

■ 上の例をどう理解するか?

古典的モデリング 3 題

Volterra モデル

人口問題

戦闘問題

被食者-捕食者問題

実際の例

Volterra モデル

Volterra モデルの数
値解例

Volterra モデルの
相図

Volterra モデルの数
値解の相図

Volterra モデルでの
漁業影響

Volterra モデルの漁
業影響

Volterra モデルの種
別漁業影響

Volterra の被食者-捕食者モデル

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -C_1 uv + D_1 u \\ \frac{dv}{dt} = C_2 uv - D_2 v \end{cases}$$

被食者 (食用魚): $u(t)$, 捕食者 (軟骨魚): $v(t)$

Volterra モデルの数値解例

人口問題

戦闘問題

被食者-捕食者問題

実際の例

Volterra モデル

Volterra モデルの数
値解例

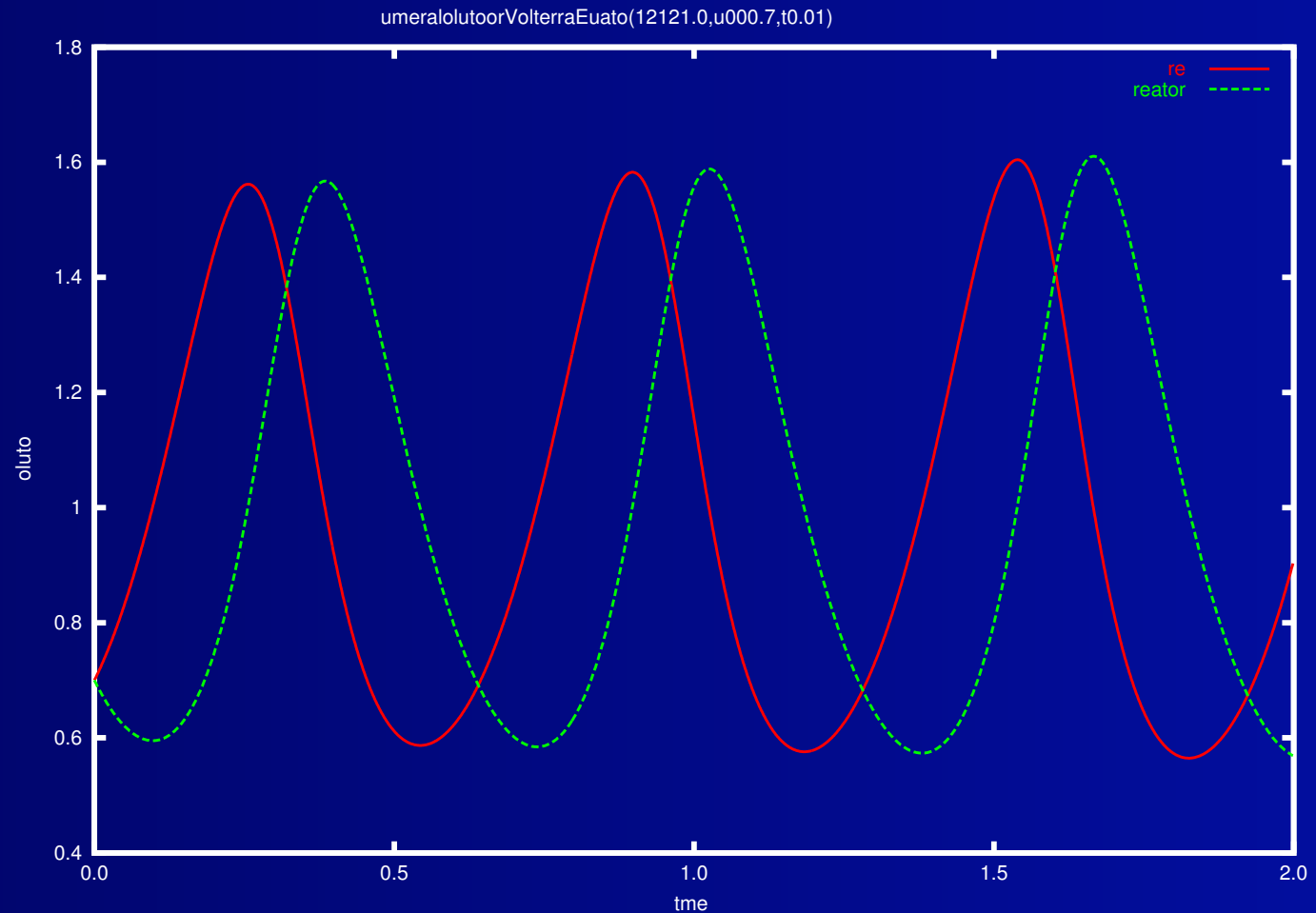
Volterra モデルの
相図

Volterra モデルの数
値解の相図

Volterra モデルでの
漁業影響

Volterra モデルの漁
業影響

Volterra モデルの種
別漁業影響



$C_1 = C_2 = D_1 = D_2 = 1.0, u(0) = v(0) = 0.7, \Delta t = 0.01$. Euler スキームによる.

Volterra モデルの相図

人口問題

戦闘問題

被食者-捕食者問題

実際の例

Volterra モデル

Volterra モデルの数
値解例

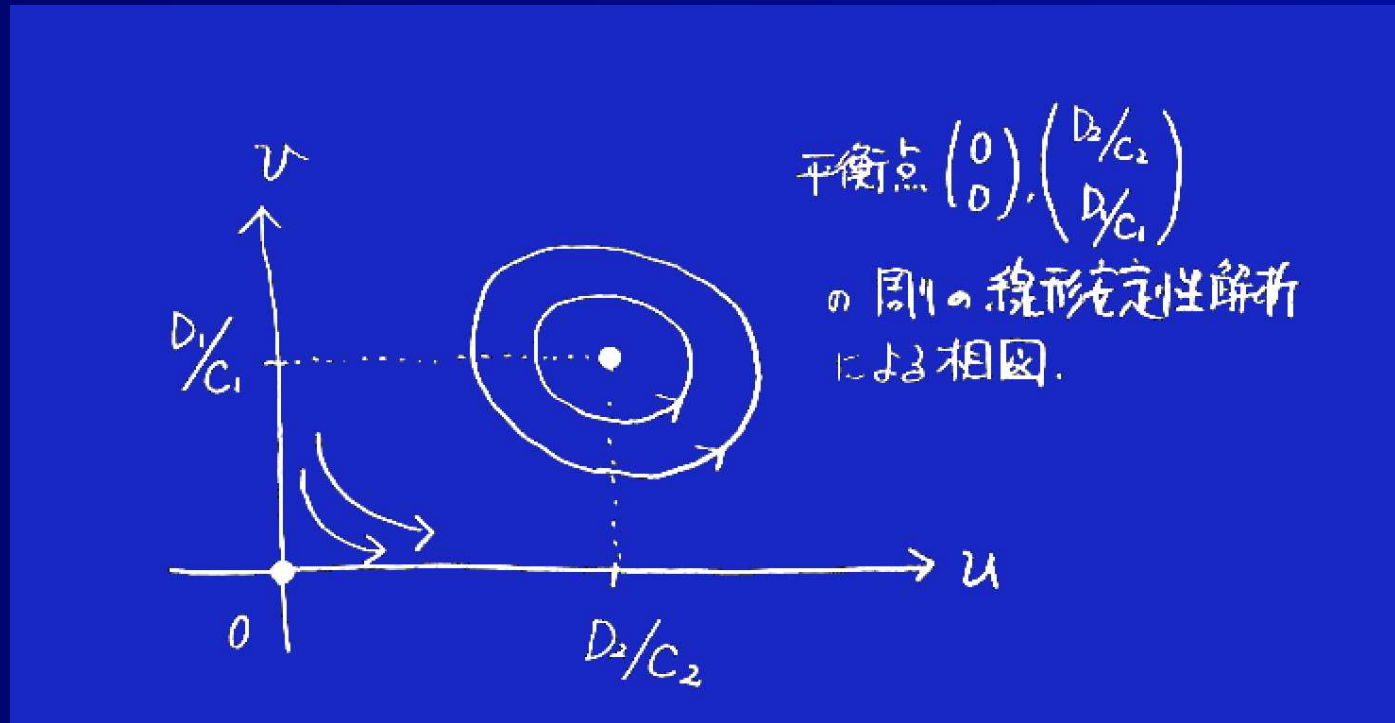
Volterra モデルの
相図

Volterra モデルの数
値解の相図

Volterra モデルでの
漁業影響

Volterra モデルの漁
業影響

Volterra モデルの種
別漁業影響



Volterra のモデル方程式の平衡点周りを線形安定性解析によって見た相図

Volterra モデルの数値解の相図

人口問題

戦闘問題

被食者-捕食者問題

実際の例

Volterra モデル

Volterra モデルの数
値解例

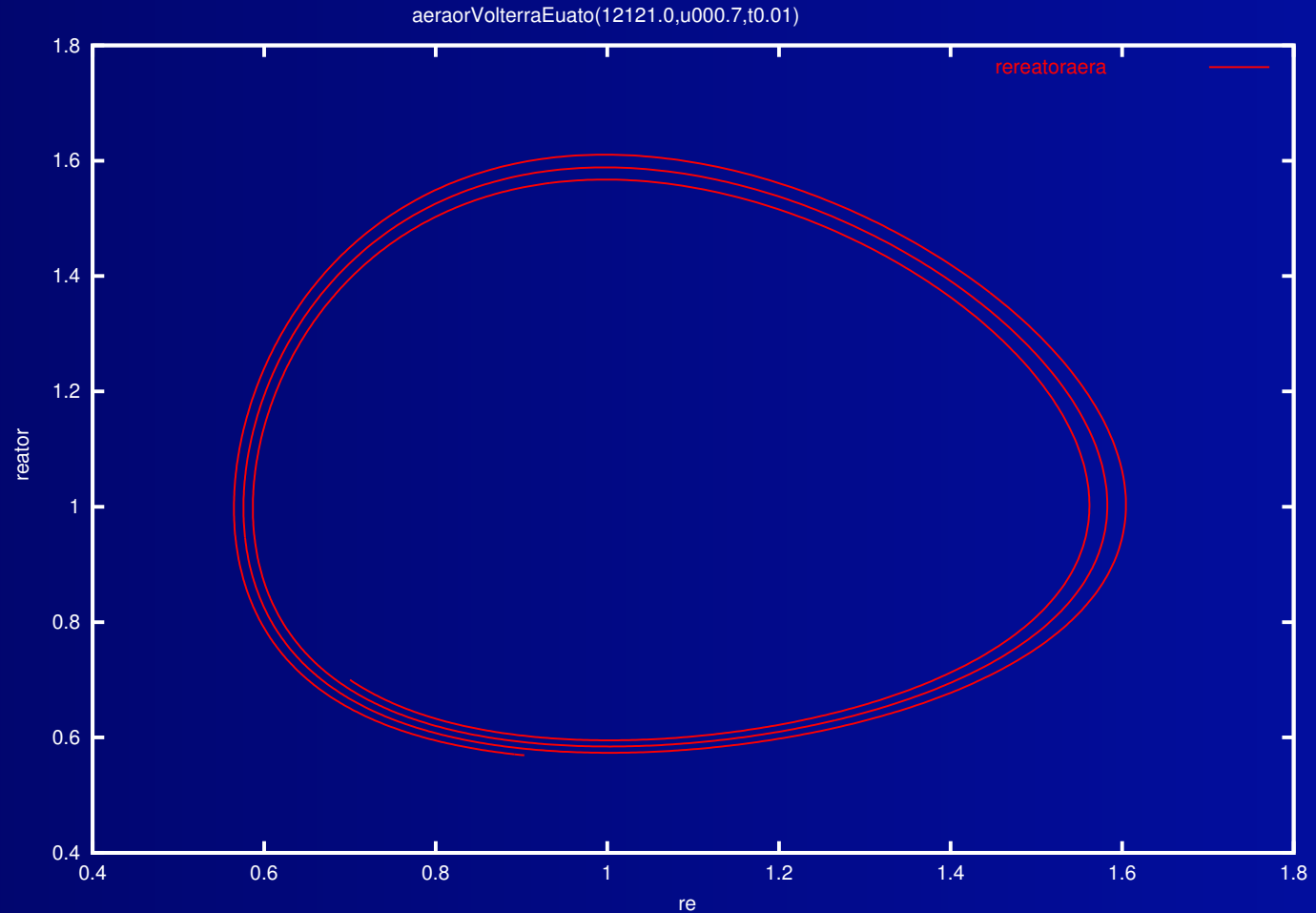
Volterra モデルの
相図

Volterra モデルの数
値解の相図

Volterra モデルでの
漁業影響

Volterra モデルの漁
業影響

Volterra モデルの種
別漁業影響



Volterra のモデル方程式の数値解を相図にしたもの

Volterra モデルでの漁業影響

人口問題

戦闘問題

被食者-捕食者問題

実際の例

Volterra モデル

Volterra モデルの数
値解例

Volterra モデルの
相図

Volterra モデルの数
値解の相図

Volterra モデルでの
漁業影響

Volterra モデルの漁
業影響

Volterra モデルの種
別漁業影響

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -C_1uv + D_1u - Eu \\ \frac{dv}{dt} = C_2uv - D_2v - Ev \end{cases}$$

- 食用魚，軟骨魚ともに一定の間引きの効果
- 結果，相図の平衡点が変化する

Volterra モデルの漁業影響

人口問題

戦闘問題

被食者-捕食者問題

実際の例

Volterra モデル

Volterra モデルの数
値解例

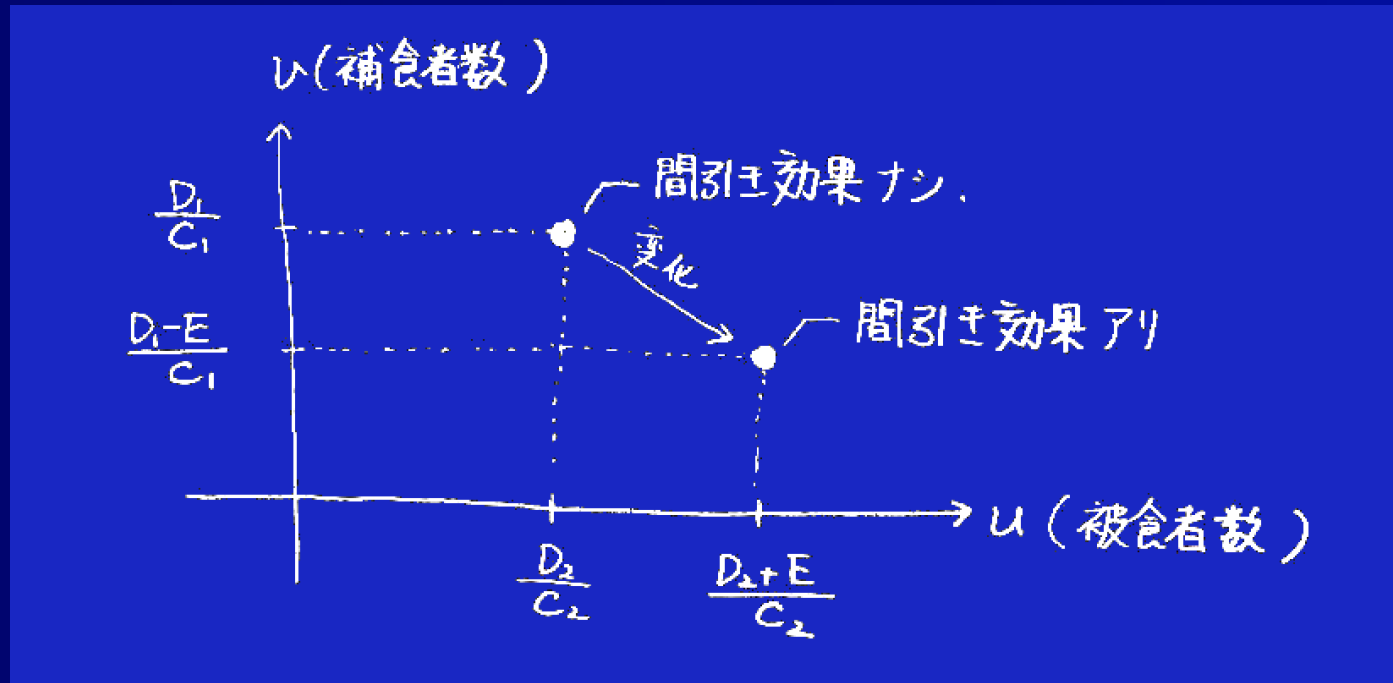
Volterra モデルの
相図

Volterra モデルの数
値解の相図

Volterra モデルでの
漁業影響

Volterra モデルの漁
業影響

Volterra モデルの種
別漁業影響



Volterra の原理 – 漁業による全体間引き効果が上のように現れる

- 被食者の平均値は増える ← 驚きである
- 捕食者の平均値は減る

Volterra モデルの種別漁業影響

人口問題

戦闘問題

被食者-捕食者問題

実際の例

Volterra モデル

Volterra モデルの数
値解例

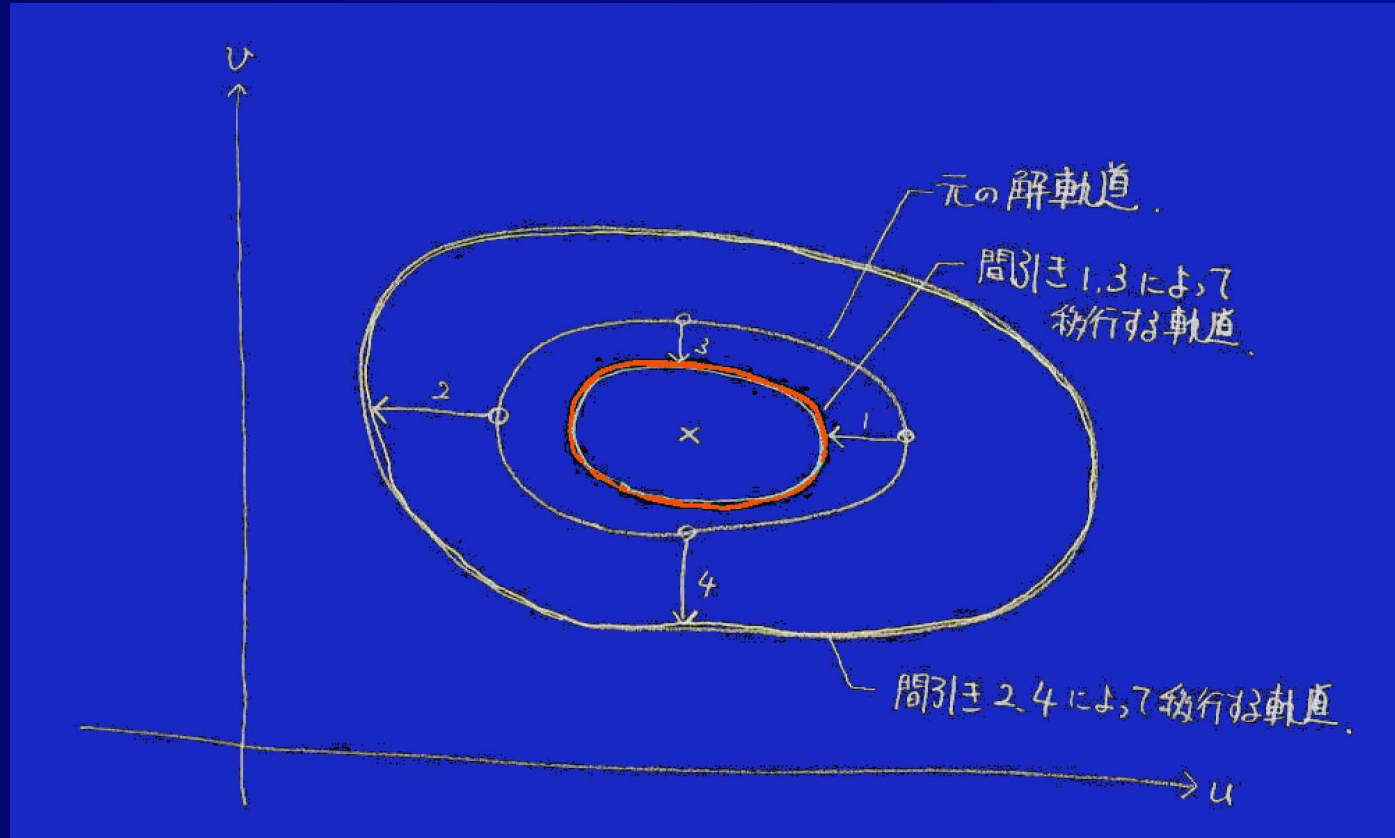
Volterra モデルの
相図

Volterra モデルの数
値解の相図

Volterra モデルでの
漁業影響

Volterra モデルの漁
業影響

Volterra モデルの種
別漁業影響



被食者か捕食者だけを狙い撃ちして間引けば？

- 少ないときに間引くとかえって振幅が増える ← 直感の逆!