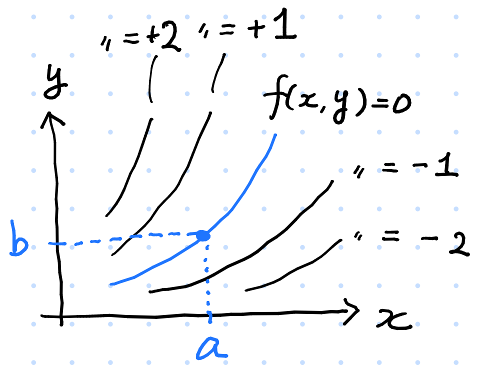
# §4-4. 陰関数定理と未定係数法.

関数 $f(x,y)$ に対して

$$\left\{\begin{array}{l} \bullet\ f(a,b)=0 \text{ が成り立つ.} \\ \bullet\ f(x,y)=0 \text{ を満たし、}(a,b)\text{ を通る } y=g(x) \text{ が存在する.} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

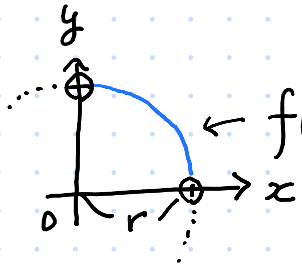
この $y=g(x)$ を $f(x,y)=0$ で定義した陰関数と言う.

（ただし、$x$ は $a$ の近くで.）




→ この青い線を $y=g(x)$ と表わせる時、$g(x)$ は $f=0$ による陰関数.

例.




← $f(x,y)=x^2+y^2-r^2=0$ の line.

$\left|x-\frac{r}{2}\right|<\frac{r}{2}$ の時、$f=0$ の line は $y=\sqrt{r^2-x^2}=g(x)$ と書けて、

これが $f=0$ の陰関数の1つ.

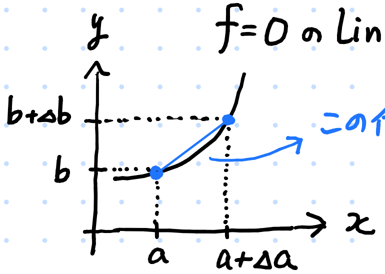
## Th. 陰函数：

$f(x,y)$ が $C^1$ 級で $\left\{ \begin{array}{c} f(a,b)=0 \\ \text{かつ} \\ f_y(a,b) \neq 0 \end{array} \right\}$ ならば、次の ①, ② が成り立つ。

① 存在：$^{\exists}$区間 $I$ s.t. $a \in I$ 上で $f=0$ の陰函数 $g(x)$ が存在する。

② 微分：$\dfrac{dg}{dx} = -\dfrac{f_x}{f_y}$.

図と Taylor で理解する。




この傾き $\simeq \dfrac{dg}{dx}$ であるので、

Taylor 展開を用いて

$$\overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(a+\Delta a)}} = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(a)}} + \nabla_x f \cdot \Delta a + O(\|\Delta a\|^2)$$

$$= (\partial_x f \quad \partial_y f) \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{pmatrix} + \quad〃$$

$$= \Delta a f_x + \Delta b f_y + O(\cdots)$$

$$\Rightarrow \underset{\dfrac{dg}{dx}.}{\underset{\shortparallel}{\frac{\Delta b}{\Delta a}}} = -\frac{f_x}{f_y} \quad (\leftarrow \Delta a \to 0 \text{ への limit で})$$

# 陰函数の高階微分 〜 2つほど方法を示そう.

方法その1. 定理より $\dfrac{dg}{dx} = -\dfrac{f_x}{f_y}$ であるので、これをさらに微分する.

例 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dg}{dx}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x))}\right) = -\dfrac{\frac{d}{dx}\left(f_x(x,g(x))\right)\cdot f_y(x,g(x)) - f_x(x,g(x))\cdot\frac{d}{dx}\left(f_y(x,g(x))\right)}{f_y(x,g(x))^2}$ 〜(*) であるので.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx} f_x(x,g(x)) = f_{xx}(x,g(x)) + f_{xy}(x,g(x))\dfrac{dg}{dx} = f_{xx} - \dfrac{f_x f_{xy}}{f_y} = (f_y f_{xx} - f_x f_{xy})/f_y, \\ \dfrac{d}{dx} f_y(x,g(x)) = f_{xy}(\,〃\,) + f_{yy}(\,〃\,)\dfrac{dg}{dx} = f_{xy} - \dfrac{f_x f_{yy}}{f_y} = (f_y f_{xy} - f_x f_{yy})/f_y \end{cases}$$ を代入して、

$$(*) = \frac{-1}{f_y^2}\cdot\left\{(f_y f_{xx} - f_x f_{xy})\cdot\frac{1}{f_y}\cdot f_y - f_x\cdot(f_y f_{xy} - f_x f_{yy})\cdot\frac{1}{f_y}\right\} = -\frac{1}{f_y^3}\left(f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_x f_y + f_{yy}f_x^2\right) /\!/$$

方法その2. $f(x, g(x)) = 0$ を微分していく方法. ラッキーだと楽だが…

例. (教 p.103の例題4.4.3): $f(x,y) = x^3 + xy^2 - 2 = 0$ に対して, $y = g(x)$ の2階微分は?

まず $f(x, g(x)) = 0$ を1回微分して,

$$3x^2 + g^2 + 2xg \cdot g' = 0. \quad \sim (*1)$$

$$\Rightarrow g' = -(3x^2 + g^2)/2xg$$ を得る.

定理より

この結果は $\frac{dg}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{3x^2+y^2}{2xy}$ としても良い.

(*1)をさらに微分すると,

$$6x + 2g \cdot g' + 2g \cdot g' + 2x(g')^2 + 2xg \cdot g'' = 0$$

$$\Rightarrow g'' = \left(3x + 2g \cdot g' + x(g')^2\right)/xg$$ を得る.

あとは $g'$ の結果を代入すれば良い.

# Th. Lagrange(ラグランジュ)の未定係数法 (制約条件を満たしつつ、極値を求める. すごく重要!!)

点 $a \in \mathbb{R}^n$ が $q$ 個の制約条件 $r_i(x) = 0$ , $i = 1, 2, \cdots, q$ のもとで 函数 $f(x)$ の極値を与える

$\Rightarrow$ $^\exists$ 定数 $\underbrace{\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_q}$ が存在して $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x_i} f \Big|_{x=a} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{q} \lambda_j r_j\right)\Big|_{x=a}$ が成り立つ.

これをラグランジュの未定係数と言う.

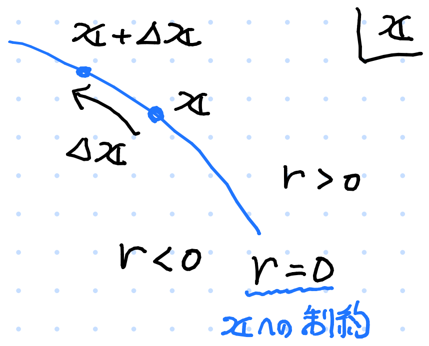
要するに、制約条件 $r_i(x) = 0$ , $i = 1, 2, \cdots, q$ のもとで 函数 $f(x)$ の極値点を探したければ、

$$\mathcal{L}(x, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q) := \underbrace{f(x)}_{\text{調べたい函数}} + \sum_{j=1}^{q} \overset{\text{Lagrangeの未定係数}}{\lambda_j} \underbrace{r_j(x)}_{\text{''0 が要求されている (制約条件)}}$$ とおいて、

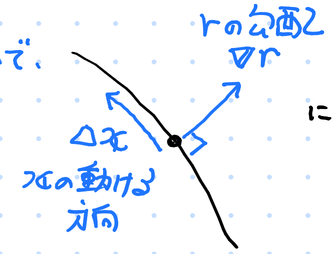
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{L} = 0 , & i = 1 \sim n, \\ r_j = 0 , & j = 1 \sim q \end{cases}$$

の解 $x_*$ を求めよ。それが極値点の候補だ、と言っている.

# Lagrange の未定係数法を理解するには？




① 制約式 $r=0$ のせいで、$\Delta x$ に制限がつく。



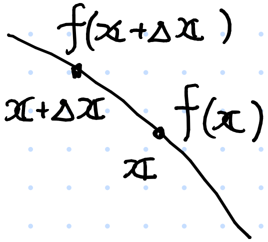

に対し、$\nabla r \perp \Delta x$

$\Leftrightarrow$ $\nabla r \cdot \Delta x = 0$. ～(*1)

↓

$\Delta x$ の方向に制限がつく。

② $f$ が極値ならば $x$ を動かしても $f$ は（一次近似で）変化しない。




$r=0$ の上で $x$ を動かして $f$ が極値

$\Rightarrow$ $f(x+\Delta x) \simeq f(x) + \nabla f \cdot \Delta x + \cdots$ に対して、

$\Delta x$の一次近似項 $=0$ が必要。

つまり、$\nabla f \cdot \Delta x = 0$ ～(*2)

↓

(*1) で制限された $\Delta x$ に対し、$\nabla f$ が垂直ならば良い。

（$\nabla f = 0$ を必要としないコトに注意）

↙ よって

$$\begin{cases} \nabla r(x) \cdot \Delta x = 0, \\ \nabla f(x) \cdot \Delta x = 0 \end{cases}$$ ～(*3) を満たす $x, \Delta x$ を見つければ良い。しかし、$\Delta x$ に興味はないので、式から $\Delta x$ を除去できないか、と考える。

幸い、$\nabla f = \lambda \nabla r$ （$\lambda$は任意定数）が成り立てば (*3) が成り立つので、この式を用いるのが Lagrange の未定係数法。

注1：制約条件が増えても同様に考えれば良い。$\nabla f = \sum_i \lambda_i \nabla r_i$ とするだけで良い。

注2：$\nabla f = \lambda \nabla r \Rightarrow$ (*3) だが逆は成り立たない。つまり、Lagrange の方法は極値点候補の一部しか探せないコトがある。ただし、それは非正則な制約条件の問題と呼ばれるケースで、粗く言えば、制約が足りない。

**例.** (教 p.106 問6 (1)). #4-4-7.

Lagrangeの未定係数法を用いると、$\begin{cases} 制約条件 & r(x) = x^2+y^2-2 = 0. \\ 対象函数 & f(x) = y - x. \end{cases}$ として、$^\exists$定数 $\lambda$ が存在して $\mathcal{L}(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda r(x,y)$ として

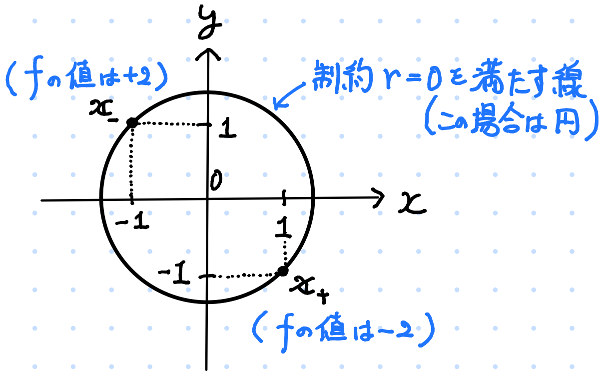
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x} f(x) + \frac{\partial}{\partial x}(\lambda \cdot r(x)) = 0, & \sim ① \\ \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial y} f(x) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda r(x)) = 0, & \sim ② \\ \frac{\partial}{\partial \lambda}\mathcal{L} = r = 0. & \sim ③ \end{cases}$$

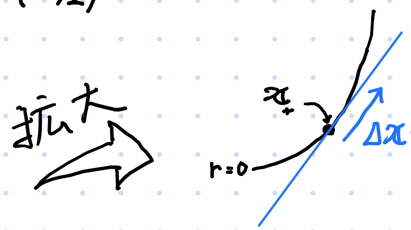
が成り立つ.

まず、$\left.\begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -1+\lambda\cdot 2x = 0, \\ 1+\lambda\cdot 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2\lambda, \\ y = -1/2\lambda. \end{cases}$

これを③に代入すると $\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2\lambda}\right)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1/4 \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$

よって ①〜③ の解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ の2つ. $x_+ := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $x_- := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ としておくと、この2点が極値点の候補。ちなみに $f(x_\pm) = \mp 2$.




$\Delta x$ がとれる方向が制限されていて、$\Delta x = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と限定される.

よって $x_+$ 付近で制約を満たしつつ $x$ を少し動かすと、Taylor展開を用いて

$$\mathcal{L}(x_+ + \Delta x) = \mathcal{L}(x_+) + \nabla\mathcal{L}\cdot\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x^T H_{\mathcal{L}} \Delta x + \cdots$$

$$= 〃 + \left.\begin{pmatrix} -1+2\lambda x \\ 1+2\lambda y \end{pmatrix}\right|_{(x_+,1/2)} \cdot c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}c^2 (1\ \ 1)\left.\begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}\right|_{\lambda=1/2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \cdots = \mathcal{L}(x_+) + c^2 + \cdots$$

ここで f ではなく $\mathcal{L}$ を調べるのは、r の影響を見る為である。

となる為. $\Delta x \to 0$ で $\mathcal{L}(x_+ + \Delta x) > \mathcal{L}(x_+)$. よって $x_+$ は極小点. 同様にして $x_-$ は極大点.

例 (教p.105, 例題 4.4.4):

$$\begin{cases} 条件(1つのみ) & r(x) = x^2 - \frac{1}{4}y^2 - 1 = 0. \\ 函数 & f(x) = x^3 + y \end{cases}$$ で $f$ の極値を調べる.

Th. Lagrange より, 定数 $\lambda$ が存在して, $\mathcal{L} := f + \lambda r$ に対して

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \mathcal{L} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x^2 + \lambda \cdot 2x = 0 \Leftrightarrow x(3x+2\lambda) = 0, \xrightarrow{3式目より\ x \neq 0\ なので} x = -\frac{2}{3}\lambda \\ 1 + \lambda \cdot (-\frac{1}{2}y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{\lambda}, \\ x^2 - \frac{1}{4}y^2 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

この結果を3式目に代入すると, $\frac{4}{9}\lambda^2 - \frac{1}{\cancel{4}}\frac{\cancel{4}}{\lambda^2} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4\lambda^4 - 9\lambda^2 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 = 3$ or $\underbrace{-3/4}_{無意味}$ $\Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{3}$

よって上の解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ の2点. $x_\pm := \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ としておく.

次に, 制約 $r(x,y)$ による $\Delta x$ の制限を調べる.

$r$ = 不変より, $r_x \Delta x + r_y \Delta y = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot \Delta x - \frac{y}{2} \cdot \Delta y = 0 \Leftrightarrow \Delta y = \frac{4x}{y}\Delta x$ であるので, $x_+$ でも $x_-$ でも $\Delta y = -4\Delta x$. つまり, $\Delta x = c\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

最後に $\mathcal{L}$ の変化を見る.

$x_+$ の場合, $\mathcal{L}(x_+ + \Delta x) \overset{Taylor}{=} \mathcal{L}(x_+) + \nabla\mathcal{L}\Big|_{x_+} \cdot \Delta x + \frac{1}{2}\Delta x^T H_{\mathcal{L}} \Delta x + \cdots$

$$= \quad // \quad + 0 \cdot \Delta x + \frac{c^2}{2}(1\ -4)\begin{pmatrix} 6x+2\lambda & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\lambda \end{pmatrix}\Bigg|_{x_+, \lambda=\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \cdots = \mathcal{L}(x_+) + 3c^2(x-\lambda)\Big|_{x_+, \lambda=\sqrt{3}} + \cdots$$

$$= \mathcal{L}(x_+) - 5\sqrt{3}c^2 + \cdots$$

より, $x_+$ から制約を守りつつズレると $\Delta x \to 0$ で $\mathcal{L}$ は必ず小さくなる. よって $x_+$ は極大点. 同様にして $x_-$ は極小点.