§4.2 多変数函数の微分連鎖律

全微分: 多変数函数 $f(x)$ に対し $f(x)-f(a) = c\cdot(x-a) + o(\|x-a\|)$ を満たすベクトル c が存在する時、

ベクトル間の内積　スモールオー

f は a で全微分可能 と言う.

$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ を思い出そう.

この時、f はどの x_k でも偏微分可能で、実は $c = \nabla f(a)$ である.

つまり、$f(x)-f(a) = \nabla f(a)\cdot(x-a) + o\cdots$ と書けるコト = 全微分可能、だ.

- 基本的に、∇f が存在して連続 $\Rightarrow$ 全微分可能 である.
- たいていは、$f(x)-f(a) \simeq \nabla f(a)\cdot(x-a)$ が成り立つ、というコトである.

(応用) 単純な連鎖律:

ベクトル函数 $x = x(t)$ の時、$f(x(t+dt)) - f(x(t)) \simeq \nabla f(x(t))\cdot\left(x(t+dt)-x(t)\right)$ と書けるので、

f の x による勾配.

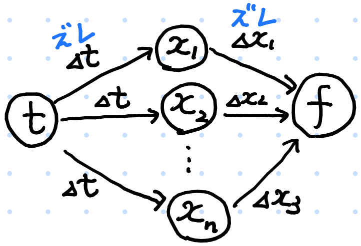
両辺を dt で割って limit をとると、

$$\lim_{dt\to 0}\frac{f(x(t+dt))-f(x(t))}{dt} = \nabla f(x(t))\cdot\lim_{dt\to 0}\frac{x(t+dt)-x(t)}{dt}$$

$$= \frac{df(x(t))}{dt} = \nabla f(x(t))\cdot\frac{dx(t)}{dt} \quad \sim(1)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\ \ \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt}\end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$ である.

連鎖律の他の見方: $\frac{df(x(t))}{dt}$ は、$t \xrightarrow{x} x(t) \xrightarrow{f} f(x(t))$ を t で微分するのだが、途中の x が複数の要素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を持っているので、それら全ての影響を足す必要がある、と考えても良い。



ズレ

$$\Delta f \simeq \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1}_{\Delta x_1 \text{のせいの} f \text{のズレ}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2}_{\Delta x_2 \text{〃}} + \cdots + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n}_{\Delta x_n \text{〃}}$$

で、$\Delta x_k \simeq \underbrace{\frac{dx_k}{dt}\Delta t}_{\Delta t \text{のせいでの} x_k \text{のズレ}}$ を左式に代入して全体を Δt で割ると

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} \simeq \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

((1)相当) を得る。

こちらの方が覚え易い人も多いだろう。

さらに一般の連鎖律: $x = x(u)$ の時、(1)の t を u_k とみなせば、

ベクトル　$u \in \mathbb{R}^n$ の関数

→ 教科書だと p.87の定理 4.2.5の中の式のコト。

$$\frac{\partial f(x(u))}{\partial u_k} = \nabla f(x(u)) \cdot \frac{\partial x(u)}{\partial u_k} \quad \sim (2)$$

例. $f(x) = xy^2 + x^3 y$, $\begin{cases} x = u+v, \\ y = u-v \end{cases}$ の時、たとえば $\frac{\partial f}{\partial v}$ を求めたければ

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = (y^2 + 3x^2 y)\cdot 1 + (2xy + x^3)(-1) = -x^3 + 3x^2 y - 2xy + y^2$$

$$= -(u+v)^3 + 3(u+v)^2(u-v) - 2(u+v)(u-v) + (u-v)^2 = 2u^3 - u^2 - 6uv^2 - 2uv - 4v^3 + 3v^2$$

Jacobi

ヤコビ行列：前ページの(2)は $\frac{\partial f}{\partial u_k} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_k} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_k} \end{pmatrix}$ とバラせるので、これを $u_1, u_2, \cdots, u_n$ について書いたものを並べると、

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \cdots \frac{\partial f}{\partial u_n}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{pmatrix} \quad \sim(3)$$

となり、行列が現われる。

- $\frac{\partial x_i}{\partial u_j}$ が (i, j) 成分の行列。これを $\mathbf{x}$ の $\mathbf{u}$ に関するヤコビ行列と言い、$J_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ などと書く。
- ヤコビ行列が正方行列の時、$\det J_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ をヤコビアンと言い、$\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots x_n)}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_n)}$ と書いたりする。

応用：$f(\mathbf{x}(\mathbf{u}))$ に対して、$\mathbf{u} \to \mathbf{u} + d\mathbf{u}$ で $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ が $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ に変化し、$f(\mathbf{x})$ が $f + df$ に変化する為、

$$df \simeq \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$ ← $\mathbf{x}$ で見た式

$\mathbf{u}$ 〃

（f に関係なく）

$$\simeq \left(\frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial u_n}\right)\begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ \vdots \\ du_n \end{pmatrix} \underset{(3)より}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) J_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ \vdots \\ du_n \end{pmatrix}$$

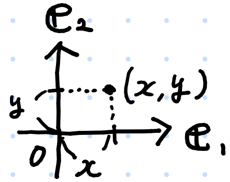
となり、$d\mathbf{x} \simeq J_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})\, d\mathbf{u}$ と書ける。

$\mathbf{u}$ の微小変化 $d\mathbf{u}$ と $\mathbf{x}$ の微小変化 $d\mathbf{x}$ の関係が $d\mathbf{x} = J_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})\, d\mathbf{u}$ であるコトを意味する

$\mathbf{x} \rightleftarrows \mathbf{u}$ という変数変換の時、この式がよく出てくる。積分の時は必須なので、その時思い出そう。

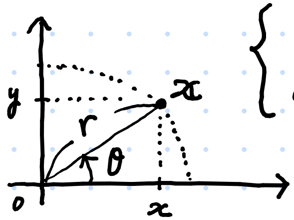
極座標 〜 変数変換入門.

$x \in \mathbb{R}^2$ に対し、ユークリッド座標 $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は



$(x = xe_1 + ye_2)$ を意味する.

これを、



大学ではラジアンを使うよ.

$$\begin{cases} r := \sqrt{x^2+y^2}, \\ \theta := \text{ベクトル } x \text{ の(正の) } x \text{ 軸からの角度(偏角と言う)} \end{cases}$$

とすると、$x \neq 0$ として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{1対1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$$

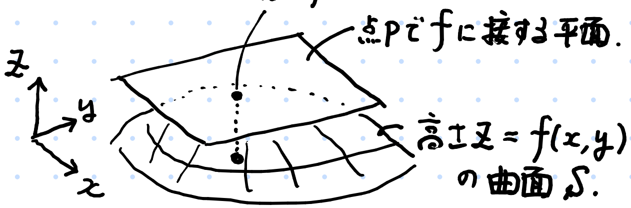
, ただし $0 \leq \theta < 2\pi$ の対応関係がある.

→ 具体的には、$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ と書ける.

この事実を利用して、

点 x を (r, θ) という座標で表示するコトができ、これを極座標表示と呼ぶ.

接平面.



これをfの接平面と言う

- この状況で、曲面 S の点 P での勾配は $\nabla f(a,b)$.
- 平面の式はそもそも一般に

$$z - z_0 = c_1(x - x_0) + c_2(y - y_0) = \mathbf{c} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

と書ける. (c_1, c_2 は定数)

- この平面が点 P で f に接する条件は

$$\begin{cases} \text{勾配 } \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ が } S \text{ の勾配 } \nabla f(a,b) \text{ と一致する} \\ \text{点 } P \text{ を通る} \end{cases}$$

の2つである.

⇒ 接平面が

$$z - f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

となる

← 教. p89. 定理 4.2.6 の式.