§4-1 多変数関数と偏微分 ～ 今までは関数は $\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ だったけど、ここからは違うよ!!

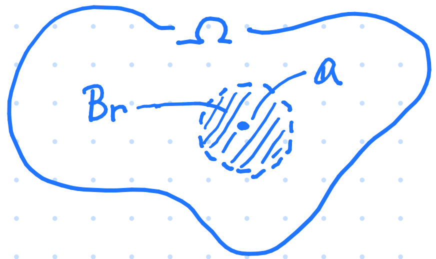
入力値が2つある!!

- 多変数関数: 入力値が数字2つ以上に相当する関数のコト. → 例. $f(x,y) = e^x(3+y^2)$, $x,y\in\mathbb{R}^1$ の場合など.

- 開集合 Ω: $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ が開集合である $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $^\exists B_r := \{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-a\|<r\}$, $^\forall a\in\Omega$, s.t. $B_r\subset\Omega$.

言っているコト.

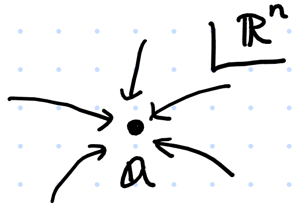
どんな $a\in\Omega$ に対しても, a を中心とする球 B_r で B_r がすっぽり Ω に含まれるようなものが必ず存在する.



- 連結である開集合$(\neq\overset{\text{空}}{\emptyset})$を領域とも言う. → 数学者はこの単語をよく使う.
  (次ページへ)
- Ω が閉領域 $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $\Omega-\partial\Omega$ が領域
  境界 $\partial\Omega$ を除去するという意味.

n次元値の入力から, 1次元値を出力する

- 多変数関数の極限: $\lim_{x\to a} f(x) = c$ for $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$ $\overset{d}{\Longleftrightarrow}$ $x\in\mathbb{R}^n$ が どのように a に近づいても $f(x)$ が c に近づく.



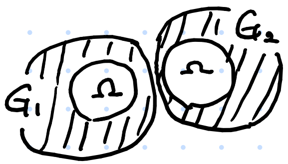
色々な方向から近づけるし、直線状に近づくとも限らない.

注 $x\to a$ への近づき方で $f(x)$ が異なった値に見える例が教p.80 の例題4.1.1に有る.
当然、この例では $f(x)$ は $x\to a$ で収束しない.

• 多変数函数の連続性： 函数 $f(x)$ が a で連続 $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

ただし、$x \in \mathbb{R}^n$.

• 連結であることの定義：



のように、$G_1 \cap G_2 = \emptyset$ な G_1, G_2 で Ω を中に含み、$G_1 \cap \Omega \neq \emptyset$, $G_2 \cap \Omega \neq \emptyset$ の時、Ω は「不連結」.

これが不可能なら Ω は連結と定義する.

• 極限のマジメな定義（ε－δ 論法）←気になる人だけ読めば良い。テストには出ない。

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \iff \left(\text{“}\ {}^{\forall}\varepsilon > 0 \text{ に対して } {}^{\exists}\delta > 0 \text{ が存在して、 } \|x-a\| < \delta \text{ とすれば } |f(x) - c| < \varepsilon \text{ が成り立つ”}\right)$$

注1：このギロンの簡略版として、$\|x-a\| =: r$ として、$\displaystyle\lim_{r\to 0} f(x) = c$ をギロンするという手がある.

（教 p.82 例題 4.1.3 はそうしている）

注2：教 p.82 例題 4.1.3 は $\begin{cases} \varepsilon = 4r^2, \\ \delta = r \end{cases}$ としているコトに相当する.

つまり ${}^{\forall}\varepsilon > 0$ に対し、${}^{\exists}\delta := \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}$ とすれば、$\|x-a\| < \delta$ の時 $|f(x) - c| < \varepsilon$ が成り立つ、と言っている.

偏微分：多変数函数 $f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots x_n)$ に対し、x_k 以外を変えない函数 $g(x_k) := f(\overbrace{x_1, \cdots, x_{k-1}, \underbrace{x_k}_{\text{変えられるのはこれのみ.}}, x_{k+1} \cdots x_n}^{\text{これらの値は固定}})$ として、

x_k での g の微分値 $\dfrac{dg}{dx_k}$ が存在する時、これを f の x_k による偏微分と言い、$\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ と書く

→手を抜いて f_{x_k} と書いたりする.

（注：$\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) := \displaystyle\lim_{x_k \to a_k} \left(\frac{f(a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1} \cdots a_n) - f(a_1, \cdots, a_k, \cdots, a_n)}{x_k - a_k} \right)$ と考えれば良い.

x が x_k の方向にのみ動く時の傾き $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon e_k) - f(x)}{\varepsilon}$ ととらえても良い.
（ベクトルだと e_k））

例. $f(x, y) = x^2 y + x^3$ に対して、$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3x^2, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 \end{cases}$ （計算は簡単…）

gradient
勾配：多変数函数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ に対し、$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{\text{ベクトル}}$ を ∇f とか $\mathrm{grad} f$ と書き、f の勾配と呼ぶ.

例. $f(x, y, z) = x^2 y z^3 + yz$ に対し、$\nabla f = \begin{pmatrix} 2xyz^3 \\ x^2 z^3 + z \\ 3x^2 y z^2 + y \end{pmatrix}$.