

## 問題解答例 for section 4.4 (教科書 p.106)

### 学生側

私は大阪大学の1年生です。理系学部におりますが数学科ではありません。下記にいくつか問題を書きますので、その解答にたどりつく過程も含めて解答を教えてください。なるべくわかりやすくお願いしますが、かといって単に推測や例のみから解答を納得させるようなやり方ではなく、あくまで数学の解答として通用するものをお願いします。

問 2 (1) 方程式  $x^3 + 3xy + y^5 - x + 1 = 0$  に対し、点  $(2, -1)$  の近くで陰関数  $y = \varphi(x)$  を持つことを示し、 $\varphi'(x)$ ,  $\varphi'(2)$  を求めよ。

問 6 (1) 条件  $x^2 + y^2 = 2$  のもとで  $f(x, y) = y - x$  の極値を求めよ。

問 6 (2) 条件  $x^2 + 2y^2 = 1$  のもとで  $f(x, y) = xy$  の極値を求めよ。

### ChatGPT

まず各問で「極値が存在するか」「候補点を漏れなく拾えているか」を明確にしながら進めます。問 6 は Lagrange の未定係数法を主に使い、最後に値を比較して極大・極小を確定します。

以下、それぞれ丁寧に解きます。

### 問 2 (1)

方程式

$$x^3 + 3xy + y^5 - x + 1 = 0$$

を

$$F(x, y) = x^3 + 3xy + y^5 - x + 1$$

とおきます。まず、点  $(2, -1)$  がこの方程式を満たしていることを確認します。

$$F(2, -1) = 2^3 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) + (-1)^5 - 2 + 1$$

なので,

$$F(2, -1) = 8 - 6 - 1 - 2 + 1 = 0.$$

したがって,  $(2, -1)$  は確かに方程式上の点です.

次に, 陰関数定理を使うために  $F_y$  を計算します.

$$F_y(x, y) = 3x + 5y^4.$$

したがって,

$$F_y(2, -1) = 3 \cdot 2 + 5(-1)^4 = 6 + 5 = 11.$$

これは 0 ではありません.

よって, 陰関数定理より, 点  $(2, -1)$  の近くで, この方程式は

$$y = \varphi(x)$$

という形に解けます. つまり,  $x = 2$  の近くで

$$F(x, \varphi(x)) = 0$$

を満たす微分可能な関数  $\varphi$  が存在します. また,

$$\varphi(2) = -1$$

です.

次に  $\varphi'(x)$  を求めます.

$$F(x, \varphi(x)) = 0$$

を  $x$  で微分します.

まず

$$F(x, y) = x^3 + 3xy + y^5 - x + 1$$

なので,

$$F_x(x, y) = 3x^2 + 3y - 1,$$

$$F_y(x, y) = 3x + 5y^4.$$

連鎖律より,

$$\frac{d}{dx}F(x, \varphi(x)) = F_x(x, \varphi(x)) + F_y(x, \varphi(x))\varphi'(x).$$

左辺は恒等的に 0 なので,

$$F_x(x, \varphi(x)) + F_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0.$$

したがって,

$$\varphi'(x) = -\frac{F_x(x, \varphi(x))}{F_y(x, \varphi(x))}.$$

具体的には,

$$\varphi'(x) = -\frac{3x^2 + 3\varphi(x) - 1}{3x + 5\varphi(x)^4}$$

です.

特に  $x = 2$  では  $\varphi(2) = -1$  なので,

$$\varphi'(2) = -\frac{3 \cdot 2^2 + 3(-1) - 1}{3 \cdot 2 + 5(-1)^4}.$$

分子は

$$12 - 3 - 1 = 8,$$

分母は

$$6 + 5 = 11.$$

よって,

$$\varphi'(2) = -\frac{8}{11}$$

です.

## 問 6 (1)

条件

$$x^2 + y^2 = 2$$

のもとで

$$f(x, y) = y - x$$

の極値を求めます.

制約条件を

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$$

とおきます.

まず, 制約集合

$$x^2 + y^2 = 2$$

は半径  $\sqrt{2}$  の円なので, 閉じていて有界です. また  $f(x, y) = y - x$  は連続関数です. したがって, 最大値・最小値は必ず存在します.

さらに,

$$\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$$

ですが, 円周上では  $(x, y) \neq (0, 0)$  なので,

$$\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$$

です. したがって, Lagrange の未定係数法を適用できます.

Lagrange の未定係数法より,

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

を解きます.

$$\nabla f = (-1, 1),$$

$$\nabla g = (2x, 2y).$$

したがって,

$$(-1, 1) = \lambda(2x, 2y).$$

成分ごとに書くと,

$$-1 = 2\lambda x,$$

$$1 = 2\lambda y.$$

この2式から,

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{2\lambda}$$

となるので,

$$y = -x$$

が得られます.

これを制約条件

$$x^2 + y^2 = 2$$

に代入すると,

$$x^2 + (-x)^2 = 2,$$

すなわち

$$2x^2 = 2.$$

よって,

$$x^2 = 1,$$

したがって

$$x = \pm 1.$$

対応する  $y$  は  $y = -x$  なので, 候補点は

$$(1, -1), \quad (-1, 1)$$

です.

それぞれで  $f$  の値を計算します.

$$f(1, -1) = (-1) - 1 = -2,$$

$$f(-1, 1) = 1 - (-1) = 2.$$

したがって,

最大値 2, その点は $(-1, 1)$
-----------------------

最小値 $-2$ , その点は $(1, -1)$
---------------------------

です.

## 問 6 (2)

条件

$$x^2 + 2y^2 = 1$$

のもとで

$$f(x, y) = xy$$

の極値を求めます.

制約条件を

$$g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$$

とおきます.

この制約集合は楕円です. 閉じていて有界なので, 連続関数  $f(x, y) = xy$  は最大値・最小値を持ちます.

また,

$$\nabla g(x, y) = (2x, 4y)$$

ですが、制約条件上では  $(x, y) = (0, 0)$  ではありません。よって、

$$\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$$

であり、Lagrange の未定係数法を適用できます。

Lagrange の未定係数法より、

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

を解きます。

$$f(x, y) = xy$$

なので、

$$\nabla f = (y, x).$$

また、

$$\nabla g = (2x, 4y).$$

したがって、

$$(y, x) = \lambda(2x, 4y).$$

成分ごとに書くと、

$$y = 2\lambda x,$$

$$x = 4\lambda y.$$

ここで、もし  $x = 0$  なら、制約条件より

$$2y^2 = 1$$

なので  $y \neq 0$  です。しかし第2式

$$x = 4\lambda y$$

から

$$0 = 4\lambda y$$

となり,  $y \neq 0$  なので  $\lambda = 0$  です. すると第1式

$$y = 2\lambda x$$

から  $y = 0$  となり矛盾します.

したがって,

$$x \neq 0$$

です. 同様に,

$$y \neq 0$$

もわかります.

そこで,

$$y = 2\lambda x, \quad x = 4\lambda y$$

から  $\lambda$  を消去します.

第1式より

$$\lambda = \frac{y}{2x},$$

第2式より

$$\lambda = \frac{x}{4y}.$$

したがって,

$$\frac{y}{2x} = \frac{x}{4y}.$$

両辺に  $4xy$  をかけると,

$$2y^2 = x^2.$$

つまり,

$$x^2 = 2y^2.$$

これを制約条件

$$x^2 + 2y^2 = 1$$

に代入すると,

$$2y^2 + 2y^2 = 1.$$

したがって,

$$4y^2 = 1,$$

$$y^2 = \frac{1}{4}.$$

よって,

$$y = \pm \frac{1}{2}.$$

また

$$x^2 = 2y^2$$

より,

$$x^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

したがって,

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

よって候補点は

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$$

です.

それぞれで

$$f(x, y) = xy$$

を計算します.

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

一方で,

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

したがって,

$$\boxed{\text{最大値 } \frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

であり, その点は

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)}$$

です.

また,

$$\boxed{\text{最小値 } -\frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

であり, その点は

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)}$$

です.

まとめると,

$$\text{問 2 (1): } \varphi'(x) = -\frac{3x^2 + 3\varphi(x) - 1}{3x + 5\varphi(x)^4}, \quad \varphi'(2) = -\frac{8}{11}$$

$$\text{問 6 (1): 最大値 } 2 \text{ at } (-1, 1), \quad \text{最小値 } -2 \text{ at } (1, -1)$$

$$\text{問 6 (2): 最大値 } \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \text{最小値 } -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

## 学生側

問 6 (1),(2) の極値の判断に、定義域が閉じていることを用いていますが、この知見を用いずに、あくまで局所的に判断するならば解答はどうなりますか？

## ChatGPT

はい。この場合は「最大値・最小値が必ず存在する」という大域的な議論を使わず、制約曲線に沿って1変数関数に直し、その1変数関数の2階微分で局所的に判定するのが一番わかりやすいです。

はい。その場合は、\*\*制約条件を満たす点だけを動ける道\*\*として見て、その道に沿った1変数関数の極値として判定します。

つまり、

$$x^2 + y^2 = 2$$

や

$$x^2 + 2y^2 = 1$$

を曲線と見て、その曲線上をパラメータ表示し、その上で  $f$  が局所的に増えるか減るかを調べます。

## 問 6 (1)

条件は

$$x^2 + y^2 = 2$$

です。これは半径  $\sqrt{2}$  の円なので、

$$x = \sqrt{2} \cos \theta, \quad y = \sqrt{2} \sin \theta$$

と書けます.

このとき

$$f(x, y) = y - x$$

なので,

$$f(\sqrt{2} \cos \theta, \sqrt{2} \sin \theta) = \sqrt{2} \sin \theta - \sqrt{2} \cos \theta.$$

これを

$$h(\theta) = \sqrt{2}(\sin \theta - \cos \theta)$$

とおきます. 制約条件のもとでの  $f$  の極値は, この 1 変数関数  $h(\theta)$  の極値として調べられます.

まず微分すると,

$$h'(\theta) = \sqrt{2}(\cos \theta + \sin \theta).$$

極値候補は

$$h'(\theta) = 0$$

より,

$$\cos \theta + \sin \theta = 0.$$

したがって,

$$\sin \theta = -\cos \theta.$$

これは円周上では

$$(x, y) = (1, -1), \quad (-1, 1)$$

に対応します.

次に 2 階微分を見ます.

$$h''(\theta) = \sqrt{2}(-\sin \theta + \cos \theta).$$

点  $(-1, 1)$  は

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

に対応します。したがって、

$$h''(\theta) = \sqrt{2} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -2 < 0.$$

よって、 $(-1, 1)$  では制約条件のもとで **\*\*局所極大\*\*** です。

その値は

$$f(-1, 1) = 1 - (-1) = 2.$$

一方、点  $(1, -1)$  は

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

に対応します。このとき、

$$h''(\theta) = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2 > 0.$$

よって、 $(1, -1)$  では制約条件のもとで **\*\*局所極小\*\*** です。

その値は

$$f(1, -1) = -1 - 1 = -2.$$

したがって、局所的な判定としては

$(-1, 1)$  で局所極大, 値は 2

$(1, -1)$  で局所極小, 値は -2

です。

## 問 6 (2)

条件は

$$x^2 + 2y^2 = 1$$

です。これは楕円なので、

$$x = \cos \theta, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta$$

と書けます。

このとき

$$f(x, y) = xy$$

なので、

$$f\left(\cos \theta, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \sin \theta.$$

したがって

$$h(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \sin \theta.$$

倍角公式

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$

を使うと、

$$h(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin 2\theta.$$

まず微分します。

$$h'(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2\theta.$$

したがって極値候補は

$$\cos 2\theta = 0$$

を満たす点です。つまり

$$2\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$$

なので、一周分では

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

です.

対応する点は,

$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right),$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right),$$

$$\theta = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \right),$$

$$\theta = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \right).$$

次に2階微分を見ます.

$$h''(\theta) = -\sqrt{2} \sin 2\theta.$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$  のとき

$$\sin 2\theta = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

したがって

$$h''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} < 0.$$

よって

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right)$$

では局所極大です.

値は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$\theta = \frac{5\pi}{4}$  のとき

$$\sin 2\theta = \sin \frac{5\pi}{2} = 1.$$

したがって

$$h''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} < 0.$$

よって

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$$

でも局所極大です.

値は

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$\theta = \frac{3\pi}{4}$  のとき

$$\sin 2\theta = \sin \frac{3\pi}{2} = -1.$$

したがって

$$h''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} > 0.$$

よって

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

では局所極小です.

値は

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$\theta = \frac{7\pi}{4}$  のとき

$$\sin 2\theta = \sin \frac{7\pi}{2} = -1.$$

したがって

$$h''\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2} > 0.$$

よって

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$$

でも局所極小です.

値は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

したがって, 局所的な判定としては

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) \text{ で局所極大}$$

であり, その値は

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

です. また,

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) \text{ で局所極小}$$

であり, その値は

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

です.

重要なのは、この解法では

制約集合が閉じて有界だから最大・最小が存在する

という事実は使っていない、という点です。使っているのはあくまで、

制約曲線に沿って動いたときの1変数関数の局所的な増減

です。そのため、得られる結論はまず

局所極大・局所極小

です。この問題では結果的にそれらが大域的な最大・最小にもなっていますが、局所判定そのものは2階微分の符号で行っています。

## 学生側

なるほど、納得です。ただしこれは制約集合をたとえば極座標という、大域表現で表現できるということを用いていますね。こうしたことも使わないとしたらどうなりますか？

## ChatGPT

ここでは大域的なパラメータ表示を避けるため、各候補点の近くの制約曲線だけを見ます。具体的には「接線方向に少し動いたときの2次変化」を調べる、という方法に切り替えます。

はい。その場合は、\*\*制約集合を大域的にパラメータ表示することも使わず\*\*、各候補点の近くでの情報だけを使って判定します。

方法は次のものです。

制約条件を

$$g(x, y) = 0$$

とし、Lagrange 関数を

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

とおきます。極値候補点では

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

が成り立ちます。その候補点  $p = (x_0, y_0)$  において、制約曲線の接線方向  $v = (v_1, v_2)$  は

$$\nabla g(p) \cdot v = 0$$

を満たす方向です。

そして、その接線方向に沿った 2 次変化を

$$v^T (\nabla^2 f(p) - \lambda \nabla^2 g(p)) v$$

で調べます。

これが制約曲線の接線方向に対して

$$> 0$$

なら局所極小、

$$< 0$$

なら局所極大です。

今回は制約曲線は 1 次元なので、接線方向は実質的に 1 本だけです。したがって、その方向で符号を見れば十分です。

## 問 6 (1)

$$f(x, y) = y - x, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 2.$$

まず

$$\nabla f = (-1, 1), \quad \nabla g = (2x, 2y).$$

Lagrange の条件

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

より

$$(-1, 1) = \lambda(2x, 2y).$$

したがって

$$-1 = 2\lambda x, \quad 1 = 2\lambda y.$$

ここから

$$y = -x$$

が出ます。制約条件に代入すると

$$x^2 + y^2 = 2$$

なので

$$x^2 + (-x)^2 = 2,$$

$$2x^2 = 2,$$

$$x = \pm 1.$$

したがって候補点は

$$(1, -1), \quad (-1, 1)$$

です。

### 点 $(-1, 1)$ での判定

この点では

$$\nabla g(-1, 1) = (-2, 2).$$

また

$$\nabla f = (-1, 1) = \frac{1}{2}(-2, 2)$$

なので、

$$\lambda = \frac{1}{2}.$$

次に 2 階微分を見ます。

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

したがって

$$\nabla^2 f - \lambda \nabla^2 g = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

これはどの非零方向  $v$  に対しても

$$v^T \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v = -(v_1^2 + v_2^2) < 0$$

です。特に、制約曲線の接線方向に対しても負です。

よって

$$\boxed{(-1, 1) \text{ は制約条件のもとで局所極大点}}$$

です。その値は

$$f(-1, 1) = 1 - (-1) = 2.$$

## 点 $(1, -1)$ での判定

この点では

$$\nabla g(1, -1) = (2, -2).$$

また

$$\nabla f = (-1, 1) = -\frac{1}{2}(2, -2)$$

なので、

$$\lambda = -\frac{1}{2}.$$

したがって

$$\nabla^2 f - \lambda \nabla^2 g = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

これは任意の非零方向  $v$  に対して

$$v^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = v_1^2 + v_2^2 > 0$$

です。特に、制約曲線の接線方向に対しても正です。

よって

(1, -1) は制約条件のもとで局所極小点

です。その値は

$$f(1, -1) = -1 - 1 = -2.$$

したがって局所的判定として、

(-1, 1) で局所極大, 値 2

(1, -1) で局所極小, 値 -2

です。

## 問 6 (2)

$$f(x, y) = xy, \quad g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1.$$

まず

$$\nabla f = (y, x), \quad \nabla g = (2x, 4y).$$

Lagrange の条件は

$$(y, x) = \lambda(2x, 4y).$$

すなわち

$$y = 2\lambda x, \quad x = 4\lambda y.$$

この式から  $x, y \neq 0$  であることがわかるので、

$$\lambda = \frac{y}{2x}$$

かつ

$$\lambda = \frac{x}{4y}.$$

したがって,

$$\frac{y}{2x} = \frac{x}{4y}.$$

両辺に  $4xy$  をかけると

$$2y^2 = x^2.$$

つまり

$$x^2 = 2y^2.$$

これを制約条件

$$x^2 + 2y^2 = 1$$

に代入すると

$$2y^2 + 2y^2 = 1,$$

$$4y^2 = 1,$$

$$y = \pm \frac{1}{2}.$$

また

$$x^2 = 2y^2 = \frac{1}{2}$$

なので

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

したがって候補点は

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

です。

ここから局所判定に入ります。

2階微分は

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

したがって、判定に使う行列は

$$\nabla^2 f - \lambda \nabla^2 g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda & 1 \\ 1 & -4\lambda \end{pmatrix}.$$

制約曲線の接線方向  $v = (v_1, v_2)$  は

$$\nabla g(x, y) \cdot v = 0$$

を満たします。つまり

$$(2x, 4y) \cdot (v_1, v_2) = 0,$$

$$2xv_1 + 4yv_2 = 0.$$

簡単のため、この接線方向として

$$v = (2y, -x)$$

を取れます。実際、

$$2x(2y) + 4y(-x) = 4xy - 4xy = 0$$

なので、これは確かに接線方向です。

**$xy > 0$  の候補点**

まず

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right), \quad \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \right)$$

を考えます。これらでは  $x$  と  $y$  が同符号なので

$$xy > 0$$

です。このとき

$$\lambda = \frac{y}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

接線方向  $v = (2y, -x)$  に対して

$$v^T (\nabla^2 f - \lambda \nabla^2 g) v$$

を計算します。

まず

$$v^T \nabla^2 f v = -4xy.$$

また、候補点では

$$x^2 = 2y^2, \quad y^2 = \frac{1}{4}$$

なので

$$v^T \nabla^2 g v = 4.$$

したがって

$$v^T (\nabla^2 f - \lambda \nabla^2 g) v = -4xy - 4\lambda.$$

いま

$$xy = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

なので、

$$-4xy - 4\lambda = -\frac{4}{2\sqrt{2}} - \frac{4}{2\sqrt{2}} < 0.$$

したがって、

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right), \quad \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \right)$$

では接線方向に沿った 2 次変化が負です。

よって

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) \text{ は局所極大点}$$

です。値は

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

です。

$xy < 0$  の候補点

次に

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

を考えます。これらでは  $x$  と  $y$  が異符号なので

$$xy < 0$$

です。このとき

$$\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

同じく接線方向  $v = (2y, -x)$  に対して

$$v^T (\nabla^2 f - \lambda \nabla^2 g) v = -4xy - 4\lambda$$

を調べます。

いま

$$xy = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

なので、

$$-4xy - 4\lambda = \frac{4}{2\sqrt{2}} + \frac{4}{2\sqrt{2}} > 0.$$

したがって、接線方向に沿った 2 次変化が正です。

よって

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) \text{ は局所極小点}$$

です。値は

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

です。

## まとめ

大域的なパラメータ表示を使わず、局所的な 2 次判定だけで判断すると、

$$\text{問 6 (1): } (-1, 1) \text{ は局所極大, 値 } 2$$

$$\text{問 6 (1): } (1, -1) \text{ は局所極小, 値 } -2$$

また、

$$\text{問 6 (2): } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) \text{ は局所極大}$$

で、値は

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

です。さらに、

$$\text{問 6 (2): } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) \text{ は局所極小}$$

で、値は

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

です。

この判定では、制約集合が閉じて有界であることも、大域的にパラメータ表示できることも使っていません。使っているのは、各候補点の近くでの

制約曲線の接線方向

と

その方向に沿った 2 次変化

だけです。